

СИНУСЫ И КОСИНУСЫ Синусы

Гра- дусы	0' →	10'	20'	30'	40'	50'	60'	Поправки								
								1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
↓ 0	0,0000	0,0029	0,0058	0,0087	0,0116	0,0145	0,0175	89	3	6	9	12	15	17	20	23
1	0,0175	0,0204	0,0233	0,0262	0,0291	0,0320	0,0349	88	3	6	9	12	15	17	20	23
2	0,0349	0,0378	0,0407	0,0436	0,0465	0,0494	0,0523	87	3	6	9	12	15	17	20	23
3	0,0523	0,0552	0,0581	0,0610	0,0640	0,0669	0,0698	86	3	6	9	12	15	17	20	23
4	0,0698	0,0727	0,0756	0,0785	0,0814	0,0843	0,0872	85	3	6	9	12	15	17	20	23
5	0,0872	0,0901	0,0929	0,0958	0,0987	0,1016	0,1045	84	3	6	9	12	14	17	20	23
6	0,1045	0,1074	0,1103	0,1132	0,1161	0,1190	0,1219	83	3	6	9	12	14	17	20	23
7	0,1219	0,1248	0,1276	0,1305	0,1334	0,1363	0,1392	82	3	6	9	12	14	17	20	23
8	0,1392	0,1421	0,1449	0,1478	0,1507	0,1536	0,1564	81	3	6	9	12	14	17	20	23
9	0,1564	0,1593	0,1622	0,1650	0,1679	0,1708	0,1736	80	3	6	9	12	14	17	20	23
10	0,1736	0,1765	0,1794	0,1822	0,1851	0,1880	0,1908	79	3	6	9	11	14	17	20	23
11	0,1908	0,1937	0,1965	0,1994	0,2022	0,2051	0,2079	78	3	6	9	11	14	17	20	23
12	0,2079	0,2108	0,2136	0,2164	0,2193	0,2221	0,2250	77	3	6	9	11	14	17	20	23
13	0,2250	0,2278	0,2306	0,2334	0,2363	0,2391	0,2419	76	3	6	8	11	14	17	20	23
14	0,2419	0,2447	0,2476	0,2504	0,2532	0,2560	0,2588	75	3	6	8	11	14	17	20	23
15	0,2588	0,2616	0,2644	0,2672	0,2700	0,2728	0,2756	74	3	6	8	11	14	17	20	23
16	0,2756	0,2784	0,2812	0,2840	0,2868	0,2896	0,2924	73	3	6	8	11	14	17	20	23
17	0,2924	0,2952	0,2979	0,3007	0,3035	0,3062	0,3090	72	3	6	8	11	14	17	19	22
18	0,3090	0,3118	0,3145	0,3173	0,3201	0,3228	0,3256	71	3	6	8	11	14	17	19	22
19	0,3256	0,3283	0,3311	0,3338	0,3365	0,3393	0,3420	70	3	5	8	11	14	16	19	22
20	0,3420	0,3448	0,3475	0,3502	0,3529	0,3557	0,3584	69	3	5	8	11	14	16	19	22
21	0,3584	0,3611	0,3638	0,3665	0,3692	0,3719	0,3746	68	3	5	8	11	14	16	19	22

22	0,3746	0,3773	0,3800	0,3827	0,3854	0,3881	0,3907	67	3	5	8	11	13	16	19	22	24
23	0,3907	0,3934	0,3961	0,3987	0,4014	0,4041	0,4067	66	3	5	8	11	13	16	19	21	24
24	0,4067	0,4094	0,4120	0,4147	0,4173	0,4200	0,4226	65	3	5	8	11	13	16	19	21	24
25	0,4226	0,4253	0,4279	0,4305	0,4331	0,4358	0,4384	64	3	5	8	10	13	16	18	21	24
26	0,4384	0,4410	0,4436	0,4462	0,4488	0,4514	0,4540	63	3	5	8	10	13	15	18	21	23
27	0,4540	0,4566	0,4592	0,4617	0,4643	0,4669	0,4695	62	3	5	8	10	13	15	18	21	23
28	0,4695	0,4720	0,4746	0,4772	0,4797	0,4823	0,4848	61	3	5	8	10	13	15	18	20	23
29	0,4848	0,4874	0,4899	0,4924	0,4950	0,4975	0,5000	60	3	5	8	10	13	15	18	20	23
30	0,5000	0,5025	0,5050	0,5075	0,5100	0,5125	0,5150	59	3	5	8	10	13	15	18	20	23
31	0,5150	0,5175	0,5200	0,5225	0,5250	0,5275	0,5299	58	2	5	7	10	12	15	17	20	22
32	0,5299	0,5324	0,5348	0,5373	0,5398	0,5422	0,5446	57	2	5	7	10	12	15	17	20	22
33	0,5446	0,5471	0,5495	0,5519	0,5544	0,5568	0,5592	56	2	5	7	10	12	15	17	19	22
34	0,5592	0,5616	0,5640	0,5664	0,5688	0,5712	0,5736	55	2	5	7	10	12	14	17	19	22
35	0,5736	0,5760	0,5783	0,5807	0,5831	0,5854	0,5878	54	2	5	7	9	12	14	17	19	21
36	0,5878	0,5901	0,5925	0,5948	0,5972	0,5995	0,6018	53	2	5	7	9	12	14	16	19	21
37	0,6018	0,6041	0,6065	0,6088	0,6111	0,6134	0,6157	52	2	5	7	9	12	14	16	18	21
38	0,6157	0,6180	0,6202	0,6225	0,6248	0,6271	0,6293	51	2	5	7	9	11	14	16	18	20
39	0,6293	0,6316	0,6338	0,6361	0,6383	0,6406	0,6428	50	2	4	7	9	11	13	16	18	20
40	0,6428	0,6450	0,6472	0,6494	0,6517	0,6539	0,6561	49	2	4	7	9	11	13	15	18	20
41	0,6561	0,6583	0,6604	0,6626	0,6648	0,6670	0,6691	48	2	4	7	9	11	13	15	17	20
42	0,6691	0,6713	0,6734	0,6756	0,6777	0,6799	0,6820	47	2	4	6	9	11	13	15	17	19
43	0,6820	0,6841	0,6862	0,6884	0,6905	0,6926	0,6947	46	2	4	6	9	11	13	15	17	19
44	0,6947	0,6967	0,6988	0,7009	0,7030	0,7050	0,7071	45	2	4	6	9	10	12	15	17	19
								Гра-	1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
								дусы									

Косинусы

Продолжение табл.

Синусы

Гра- дусы	0' →	10'	20'	30'	40'	50'	60'	Поправки								
								1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
145	0,7071	0,7092	0,7112	0,7133	0,7153	0,7173	0,7193	44	2	4	6	8	10	12	14	16
46	0,7193	0,7214	0,7234	0,7254	0,7274	0,7294	0,7314	43	2	4	6	8	10	12	14	16
47	0,7314	0,7333	0,7353	0,7373	0,7392	0,7412	0,7431	42	2	4	6	8	10	12	14	16
48	0,7431	0,7451	0,7470	0,7490	0,7509	0,7528	0,7547	41	2	4	6	8	10	12	14	15
49	0,7547	0,7566	0,7585	0,7604	0,7623	0,7642	0,7660	40	2	4	6	8	9	11	13	15
50	0,7660	0,7679	0,7698	0,7716	0,7735	0,7753	0,7771	39	2	4	6	7	9	11	13	15
51	0,7771	0,7790	0,7808	0,7826	0,7844	0,7862	0,7880	38	2	4	5	7	9	11	13	14
52	0,7880	0,7898	0,7916	0,7934	0,7951	0,7969	0,7986	37	2	4	5	7	9	11	12	14
53	0,7986	0,8004	0,8021	0,8039	0,8056	0,8073	0,8090	36	2	3	5	7	9	10	12	14
54	0,8090	0,8107	0,8124	0,8141	0,8158	0,8175	0,8192	35	2	3	5	7	8	10	12	13
55	0,8192	0,8208	0,8225	0,8241	0,8258	0,8274	0,8290	34	2	3	5	7	8	10	12	13
56	0,8290	0,8307	0,8323	0,8339	0,8355	0,8371	0,8387	33	2	3	5	6	8	10	11	13
57	0,8387	0,8403	0,8418	0,8434	0,8450	0,8465	0,8480	32	2	3	5	6	8	9	11	13
58	0,8480	0,8496	0,8511	0,8526	0,8542	0,8557	0,8572	31	2	3	5	6	8	9	11	12
59	0,8572	0,8587	0,8601	0,8616	0,8631	0,8646	0,8660	30	1	3	4	6	7	9	10	12
60	0,8660	0,8675	0,8689	0,8704	0,8718	0,8732	0,8746	29	1	3	4	6	7	9	10	11
61	0,8746	0,8760	0,8774	0,8788	0,8802	0,8816	0,8829	28	1	3	4	6	7	8	10	11
62	0,8829	0,8843	0,8857	0,8870	0,8884	0,8897	0,8910	27	1	3	4	5	7	8	9	11
63	0,8910	0,8923	0,8936	0,8949	0,8962	0,8975	0,8988	26	1	3	4	5	6	8	9	10
64	0,8988	0,9001	0,9013	0,9026	0,9038	0,9051	0,9063	25	1	3	4	5	6	8	9	10
65	0,9063	0,9075	0,9088	0,9100	0,9112	0,9124	0,9135	24	1	2	4	5	6	7	8	10
66	0,9135	0,9147	0,9159	0,9171	0,9182	0,9194	0,9205	23	1	2	3	5	6	7	8	9

	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	Гра- дусы	1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
67	0,9205	0,9216	0,9228	0,9239	0,9250	0,9261	0,9272	22	1	2	3	4	5	6	7	8	9
68	0,9272	0,9283	0,9293	0,9304	0,9315	0,9325	0,9336	21	1	2	3	4	5	6	7	8	9
69	0,9336	0,9346	0,9356	0,9367	0,9377	0,9387	0,9397	20	1	2	3	4	5	6	7	8	9
70	0,9397	0,9407	0,9417	0,9426	0,9436	0,9446	0,9455	19	1	2	3	4	5	6	7	8	9
71	0,9455	0,9465	0,9474	0,9483	0,9492	0,9502	0,9511	18	1	2	3	4	5	6	7	8	9
72	0,9511	0,9520	0,9528	0,9537	0,9546	0,9555	0,9563	17	1	2	3	4	5	6	7	8	9
73	0,9563	0,9572	0,9580	0,9588	0,9596	0,9605	0,9613	16	1	2	3	4	5	6	7	8	9
74	0,9613	0,9621	0,9628	0,9636	0,9644	0,9652	0,9659	15	1	2	3	4	5	6	7	8	9
75	0,9659	0,9667	0,9674	0,9681	0,9689	0,9696	0,9703	14	1	1	2	3	4	5	6	7	9
76	0,9703	0,9710	0,9717	0,9724	0,9730	0,9737	0,9744	13	1	1	2	3	3	4	5	5	6
77	0,9744	0,9750	0,9757	0,9763	0,9769	0,9775	0,9781	12	1	1	2	3	3	4	4	5	6
78	0,9781	0,9787	0,9793	0,9799	0,9805	0,9811	0,9816	11	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	0,9816	0,9822	0,9827	0,9833	0,9838	0,9843	0,9848	10	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	0,9848	0,9853	0,9858	0,9863	0,9868	0,9872	0,9877	9	0	1	1	2	2	2	3	3	4
81	0,9877	0,9881	0,9886	0,9890	0,9894	0,9899	0,9903	8	0	1	1	2	2	2	3	3	4
82	0,9903	0,9907	0,9911	0,9914	0,9918	0,9922	0,9925	7	0	1	1	2	2	2	2	3	3
83	0,9925	0,9929	0,9932	0,9936	0,9939	0,9942	0,9945	6	0	1	1	1	1	2	2	2	3
84	0,9945	0,9948	0,9951	0,9954	0,9957	0,9959	0,9962	5	0	1	1	1	1	1	2	2	2
85	0,9962	0,9964	0,9967	0,9969	0,9971	0,9974	0,9976	4	0	0	1	1	1	1	2	2	2
86	0,9976	0,9978	0,9980	0,9981	0,9983	0,9985	0,9986	3	0	0	1	1	1	1	1	1	2
87	0,9986	0,9988	0,9989	0,9990	0,9992	0,9993	0,9994	2	0	0	0	1	1	1	1	1	1
88	0,9994	0,9995	0,9996	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1
89	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	↑0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Косинусы

**Соотношения между тригонометрическими
функциями одного и того же угла**

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$		
$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$	$\sec^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$	$\operatorname{cosec}^2 \alpha = 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha$
$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$		
$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$	$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$	
$\sin \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha = 1$	$\sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$	
$\cos \alpha \cdot \sec \alpha = 1$		

**Эти формулы можно
функциями одного и того же угла**

Функ- ция	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
$\sin \alpha$	—	$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$	$\sin^2 \alpha = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$
$\cos \alpha$	$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$	—	$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\sin^2 \alpha = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$	$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$	—
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$	$\cos^2 \alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$	$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$
$\sec \alpha$	$\sin^2 \alpha = \frac{\sec^2 \alpha - 1}{\sec^2 \alpha}$	$\cos \alpha \cdot \sec \alpha = 1$	$\sec^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$
$\operatorname{cosec} \alpha$	$\sin \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha = 1$	$\cos^2 \alpha = \frac{\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1}{\operatorname{cosec}^2 \alpha}$	$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1}$

	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sec \alpha$	$\operatorname{cosec} \alpha$
$\sin \alpha$	$\sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$	$\sin^2 \alpha = \frac{\sec^2 \alpha - 1}{\sec^2 \alpha}$	$\sin \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha = 1$
$\cos \alpha$	$\cos^2 \alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$	$\cos \alpha \cdot \sec \alpha = 1$	$\cos^2 \alpha = \frac{\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1}{\operatorname{cosec}^2 \alpha}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$	$\sec^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$	$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	—	$\operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sec^2 \alpha - 1}$	$\operatorname{cosec}^2 \alpha = 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha$
$\sec \alpha$	$\operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sec^2 \alpha - 1}$	—	$\sec^2 \alpha = \frac{\operatorname{cosec}^2 \alpha}{\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1}$
$\operatorname{cosec} \alpha$	$\operatorname{cosec}^2 \alpha = 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha$	$\operatorname{cosec}^2 \alpha = \frac{\sec^2 \alpha}{\sec^2 \alpha - 1}$	—

Выражения одних тригонометрических функций через другие

	sin	cos	tg	ctg	sec	cosec
sin x	—	$= \pm \sqrt{1 - \cos^2 x}$	$= \frac{\operatorname{tg} x}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$	$= \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}}$	$= \frac{\pm \sqrt{\sec^2 x - 1}}{\sec^2 x}$	$= \frac{1}{\operatorname{cosec} x}$
cos x	$= \pm \sqrt{1 - \sin^2 x}$	—	$= \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$	$= \frac{\operatorname{ctg} x}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}}$	$= \frac{1}{\sec x}$	$= \frac{\pm \sqrt{\operatorname{cosec}^2 x - 1}}{\operatorname{cosec}^2 x}$
tg x	$= \frac{\sin x}{\pm \sqrt{1 - \sin^2 x}}$	$= \frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}$	—	$= \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$	$= \pm \sqrt{\sec^2 x - 1}$	$= \frac{1}{\pm \sqrt{\operatorname{cosec}^2 x - 1}}$
ctg x	$= \frac{\pm \sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sin x}$	$= \frac{\cos x}{\pm \sqrt{1 - \cos^2 x}}$	$= \frac{1}{\operatorname{tg} x}$	—	$= \frac{1}{\pm \sqrt{\sec^2 x - 1}}$	$= \pm \sqrt{\operatorname{cosec}^2 x - 1}$
sec x	$= \frac{1}{\pm \sqrt{1 - \sin^2 x}}$	$= \frac{1}{\cos x}$	$= \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}$	$= \frac{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}}{\operatorname{ctg} x}$	—	$= \frac{\operatorname{cosec} x}{\pm \sqrt{\operatorname{cosec}^2 x - 1}}$
cosec x	$= \frac{1}{\sin x}$	$= \frac{1}{\pm \sqrt{1 - \cos^2 x}}$	$= \frac{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}{\operatorname{tg} x}$	$= \pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}$	$= \frac{\sec x}{\pm \sqrt{\sec^2 x - 1}}$	—

Формулы приведения

Функция α	Аргумент α								
	$-\alpha$	$90^\circ - \alpha$	$90^\circ + \alpha$	$180^\circ - \alpha$	$180^\circ + \alpha$	$270^\circ - \alpha$	$270^\circ + \alpha$	$360^\circ - \alpha$	$360^\circ + \alpha$
	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$	$2\pi + \alpha$
$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$+\cos \alpha$	$+\cos \alpha$	$+\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$+\sin \alpha$
$\cos \alpha$	$+\cos \alpha$	$+\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$+\sin \alpha$	$+\cos \alpha$	$+\cos \alpha$
$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$+\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$+\operatorname{tg} \alpha$	$+\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$+\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$+\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$+\operatorname{ctg} \alpha$	$+\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$+\operatorname{ctg} \alpha$
$\sec \alpha$	$+\sec \alpha$	$+\operatorname{cosec} \alpha$	$-\operatorname{cosec} \alpha$	$-\sec \alpha$	$-\sec \alpha$	$-\operatorname{cosec} \alpha$	$+\operatorname{cosec} \alpha$	$+\sec \alpha$	$+\sec \alpha$
$\operatorname{cosec} \alpha$	$-\operatorname{cosec} \alpha$	$+\sec \alpha$	$+\sec \alpha$	$+\operatorname{cosec} \alpha$	$-\operatorname{cosec} \alpha$	$-\sec \alpha$	$-\sec \alpha$	$-\operatorname{cosec} \alpha$	$+\operatorname{cosec} \alpha$

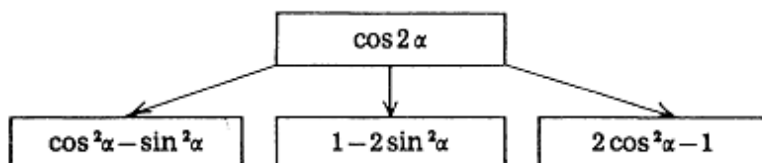
Формулы сложения и вычитания

Функция	Аргумент	
	$\alpha + \beta$	$\alpha - \beta$
sin	$\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$	$\sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$
cos	$\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$	$\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$
tg	$\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$	$\frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$
ctg	$\frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$	$\frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}$
sec	$\frac{1}{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta}$	$\frac{1}{\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta}$
cosec	$\frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}$	$\frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta}$

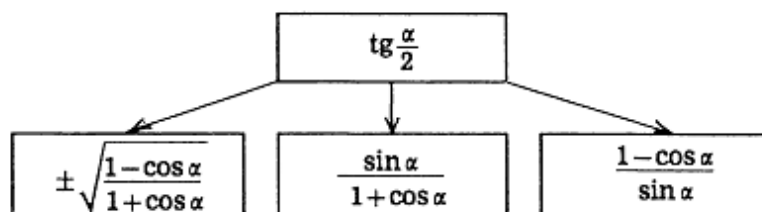
Формулы половинных, двойных и тройных углов (также $\sin 4\alpha$; $\cos 4\alpha$)

Аргумент Функция	$\frac{\alpha}{2}$	2α	3α	4α
sin	$\pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$	$2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$	$3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$	$4 \cos^3 \alpha \cdot \sin \alpha - 4 \cos \alpha \cdot \sin^3 \alpha$
cos	$\pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$	$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$	$4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$	$\cos^4 \alpha - 6 \cos^2 \alpha \times \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha$
tg	$\pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$	$\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$	$\frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$	—
ctg	$\pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}$	$\frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$	$\frac{\operatorname{ctg}^3 \alpha - 3 \operatorname{ctg} \alpha}{3 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}$	—

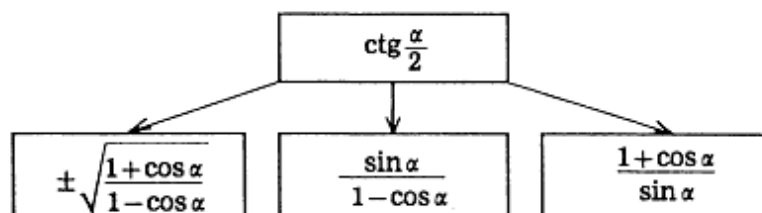
Формулы двойного угла для косинуса



Формулы половинного угла для тангенса



Формулы половинного угла для котангенса



Обратные тригонометрические функции

Функция	Обратная функция	α	$\sin \alpha$
$\sin$	$\arcsin a = \alpha$	$\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	$\sin \alpha = a$
$\cos$	$\arccos a = \alpha$	$\alpha \in [0; \pi]$	$\cos \alpha = a$
tg	$\operatorname{arctg} a = \alpha$	$\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	$\operatorname{tg} \alpha = a$
ctg	$\operatorname{arcctg} a = \alpha$	$\alpha \in (0; \pi)$	$\operatorname{ctg} \alpha = a$

Основные соотношения для обратных тригонометрических функций

$$\begin{array}{ll} \sin (\arcsin a)=a & \arcsin (\sin \alpha)=(-1)^k \cdot \alpha+\pi k \\ \cos (\arccos a)=a & \arccos (\cos \alpha)=\pm \alpha+2 \pi k \\ \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a)=a & \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha)=\alpha+\pi k \quad k \in \mathbb{Z} \\ \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a)=a & \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} \alpha)=\alpha+\pi k \end{array}$$

$$\arcsin a+\arccos a=\frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arctg} a+\operatorname{arcctg} a=\frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin a+\arcsin b=\arcsin \left(a \sqrt{1-b^2}+b \sqrt{1-a^2}\right)$$

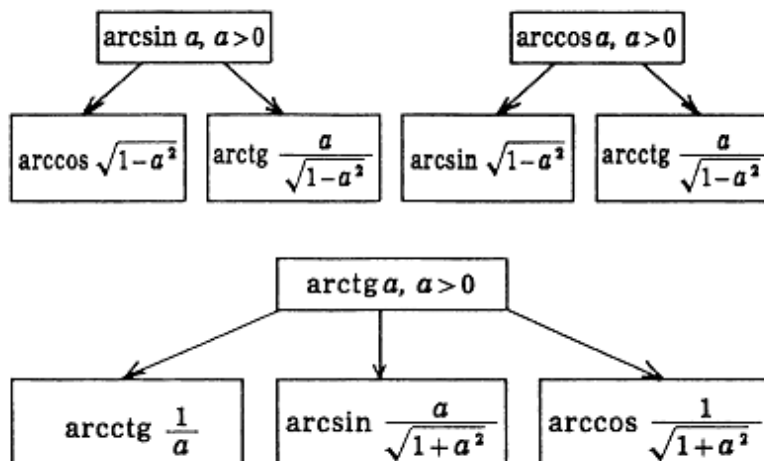
$$\arcsin a-\arcsin b=\arcsin \left(a \sqrt{1-b^2}-b \sqrt{1-a^2}\right)$$

$$\arccos a+\arccos b=\arccos \left(a b-\sqrt{1-a^2} \cdot \sqrt{1-b^2}\right)$$

$$\arccos a-\arccos b=\arccos \left(a b+\sqrt{1-a^2} \cdot \sqrt{1-b^2}\right)$$

$$\operatorname{arctg} a+\operatorname{arctg} b=\operatorname{arctg} \frac{a+b}{1-a b}$$

$$\operatorname{arctg} a-\operatorname{arctg} b=\operatorname{arctg} \frac{a-b}{1+a b}$$



**Выражение аркфункций одна через другую
с использованием тригонометрических формул**

$\sin (\arcsin x)=x, x \leqslant 1$	$\cos (\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}, x \leqslant 1$
$\sin (\arccos x)=\sqrt{1-x^2}, x \leqslant 1$	$\cos (\arccos x)=x, x \leqslant 1$
$\sin (\operatorname{arctg} x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\cos (\operatorname{arctg} x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\sin (\operatorname{arcctg} x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\cos (\operatorname{arcctg} x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{tg} (\arcsin x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$ $ x < 1$	$\operatorname{ctg} (\arcsin x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$ $ x \leqslant 1, x \neq 0$
$\operatorname{tg} (\arccos x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$ $ x \leqslant 1, x \neq 0$	$\operatorname{ctg} (\arccos x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$ $ x < 1$
$\operatorname{tg} (\operatorname{arctg} x)=x$	$\operatorname{ctg} (\operatorname{arctg} x)=\frac{1}{x}, x \neq 0$
$\operatorname{tg} (\operatorname{arcctg} x)=\frac{1}{x}, x \neq 0$	$\operatorname{ctg} (\operatorname{arcctg} x)=x$

Решение тригонометрических уравнений

Уравнение	a	Формулы решений	Частные случаи
$\sin x = a$	$ a > 1$	Нет решений	—
	$ a \leq 1$	$x = (-1)^k \cdot \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$	$\sin x = 0; x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$
			$\sin x = 1; x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
			$\sin x = -1; x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\cos x = a$	$ a > 1$	Нет решений	—
	$ a \leq 1$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\cos x = 0; x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
			$\cos x = 1; x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
			$\cos x = -1; x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = a$	a — любое число	$x = \operatorname{arctg} a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$	—
$\operatorname{ctg} x = a$	a — любое число	$x = \operatorname{arccotg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	—

Решение простейших тригонометрических уравнений вида $\sin x = a$; $\cos x = a$

(для некоторых наиболее часто встречающихся значений a)

a	$\sin x = a$	$\cos x = a$
0	$x = \pi k$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$
1	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$	$x = 2\pi n$
-1	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$	$x = \pi + 2\pi n$
$\frac{1}{2}$	$x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k$	$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$
$-\frac{1}{2}$	$x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k$	$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{3} + \pi k$	$x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{3} + \pi k$	$x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k$	$x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k$	$x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$

$$k, n \in \mathbb{Z}$$

Продолжение табл.
(для уравнений вида $\operatorname{tg} x = a$; $\operatorname{ctg} x = a$)

a	$\operatorname{tg} x = a$	$\operatorname{ctg} x = a$
0	$x = \pi k$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$
1	$x = \frac{\pi}{4} + \pi k$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n$
-1	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$	$x = \frac{3\pi}{4} + \pi n$
$\sqrt{3}$	$x = \frac{\pi}{3} + \pi k$	$x = \frac{\pi}{6} + \pi n$
$-\sqrt{3}$	$x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$	$x = \frac{5\pi}{6} + \pi n$
$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$x = \frac{\pi}{6} + \pi k$	$x = \frac{\pi}{3} + \pi n$
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$x = -\frac{\pi}{6} + \pi k$	$x = \frac{2\pi}{3} + \pi n$

$k, n \in \mathbb{Z}$

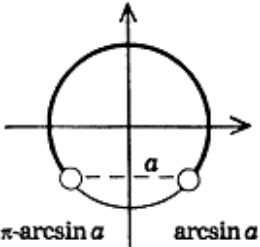
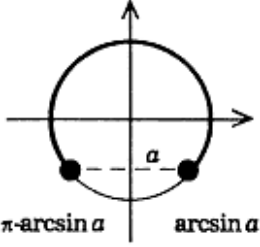
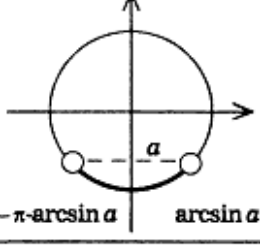
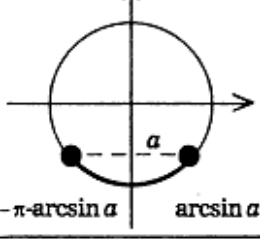
Тригонометрические уравнения

Уравнение содержит только синусы или косинусы (синусы и косинусы); вида $a \sin^2 f(x) + b \sin f(x) + c = 0,$ $a \cos^2 f(x) + b \sin f(x) + c = 0$ и т. д.	Однородное уравнение I степени вида $a \sin x + b \cos x = 0 \quad (a \neq 0; b \neq 0)$	Однородное уравнение II степени вида $a \sin^2 f(x) + b \sin f(x) \times \cos f(x) + k \cos^2 f(x) = 0$	Уравнения вида $a \operatorname{tg} x + b \operatorname{ctg} x + c = 0$
<u>Способ решения:</u> уравнение сводится к квадратному (биквадратному) относительно синуса (косинуса)	<u>Способ решения:</u> деление обеих частей на $\cos x \neq 0$. Получаем: $a \operatorname{tg} x + b = 0$	<u>Способ решения:</u> деление обеих частей на $\cos^2 x \neq 0$. Получаем: $a \operatorname{tg}^2 f(x) + b \operatorname{tg} x + k = 0$	<u>Способ решения:</u> уравнение сводится к квадратному относительно тангенса заменой $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$
<u>Формулы:</u> $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ $ax^2 + bx + c = 0$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$	<u>Формулы:</u> $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$	<u>Формулы:</u> $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$	<u>Формулы:</u> $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$ $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$

Примеры решений тригонометрических уравнений

Пример 1	Пример 2	Пример 3	Пример 4
$8 \sin^2 x + 6 \cos x - 3 = 0,$ $8(1 - \cos^2 x) + 6 \cos x - 3 = 0,$ $8 \cos^2 x - 6 \cos x - 5 = 0.$ Пусть $\cos x = t$. Тогда $8t^2 - 6t - 5 = 0,$ $t_1 = -\frac{1}{2};$ $t_2 = \frac{5}{4}.$ 1) $\cos x = -\frac{1}{2},$ $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,$ $k \in \mathbb{Z}.$ 2) $\cos x = \frac{5}{4}.$ Решений нет, т. к. $\frac{5}{4} > 1.$ Ответ: $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,$ $k \in \mathbb{Z}.$	$\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0,$ $\cos x \neq 0,$ т. к. если $\cos x = 0,$ то и $\sin x = 0,$ а этого быть не может. Делим обе части уравнения на $\cos x$: $\operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0,$ $\operatorname{tg} x = \sqrt{3},$ $x = \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi k,$ $k \in \mathbb{Z}.$ $x = \frac{\pi}{3} + \pi k,$ $k \in \mathbb{Z}.$ Ответ: $\frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$	$2 \sin^2 x - 5 \sin x \cdot \cos x + 3 \cos^2 x = 0,$ $\cos x \neq 0,$ т. к. если $\cos x = 0,$ то и $\sin x = 0,$ а этого быть не может. Делим обе части уравнения на $\cos^2 x$: $2 \operatorname{tg}^2 x - 5 \operatorname{tg} x + 3 = 0.$ Пусть $\operatorname{tg} x = y$. Тогда $2y^2 - 5y + 3 = 0,$ $y_1 = 1; \quad y_2 = \frac{3}{2}.$ 1) $\operatorname{tg} x = 1,$ $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,$ $k \in \mathbb{Z}.$ 2) $\operatorname{tg} x = \frac{3}{2},$ $x = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi k,$ $k \in \mathbb{Z}.$ Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$ $\operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi k,$ $k \in \mathbb{Z}.$	$2 \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = 1.$ Область определения уравнения: $\begin{cases} \cos x \neq 0, \\ \sin x \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ x \neq \pi k, \text{ т. е. } \end{cases}$ $x \neq \frac{\pi}{2} \cdot k,$ $k \in \mathbb{Z}.$ $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x},$ поэтому $2 \operatorname{tg} x - \frac{1}{\operatorname{tg} x} = 1,$ т. е. $2 \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 1 = 0.$ Пусть $\operatorname{tg} x = t$. Тогда $2t^2 - t - 1 = 0,$ $t_1 = -\frac{1}{2}; \quad t_2 = 1.$ 1) $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2},$ $x = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$ 2) $\operatorname{tg} x = 1,$ $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$ Ответ: $-\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k,$ $\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Решение неравенств вида
 $\sin x > a$; $\sin x \geq a$; $\sin x < a$; $\sin x \leq a$

Неравенство	Изображение решений	Ответ
$\sin x > a$		$(\arcsin a + 2\pi n;$ $\pi - \arcsin a + 2\pi n)$ $n \in \mathbb{Z}$
$\sin x \geq a$		$[\arcsin a;$ $\pi - \arcsin a + 2\pi n]$ $n \in \mathbb{Z}$
$\sin x < a$		$(-\pi - \arcsin a + 2\pi n;$ $\arcsin a + 2\pi n)$ $n \in \mathbb{Z}$
$\sin x \leq a$		$[-\pi - \arcsin a + 2\pi n;$ $\arcsin a + 2\pi n]$ $n \in \mathbb{Z}$

Решение неравенств вида
 $\cos x > a$; $\cos x \geq a$; $\cos x < a$; $\cos x \leq a$

Неравенство	Изображение решений	Ответ
$\cos x > a$		$(-\arccos a + 2\pi n; \arccos a + 2\pi n)$ $n \in \mathbb{Z}$
$\cos x \geq a$		$[-\arccos a + 2\pi n; \arccos a + 2\pi n]$ $n \in \mathbb{Z}$
$\cos x < a$		$(\arccos a + 2\pi n; 2\pi - \arccos a + 2\pi n)$ $n \in \mathbb{Z}$
$\cos x \leq a$		$[\arccos a + 2\pi n; 2\pi - \arccos a + 2\pi n]$ $n \in \mathbb{Z}$

Решение неравенств вида
 $\operatorname{tg} x > a$; $\operatorname{tg} x \geq a$; $\operatorname{tg} x < a$; $\operatorname{tg} x \leq a$

Неравенство	Изображение решений	Ответ
$\operatorname{tg} x > a$		$(\operatorname{arctg} a + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k)$ $k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x \geq a$		$[\operatorname{arctg} a + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k)$ $k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x < a$		$(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \operatorname{arctg} a + \pi k)$ $k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x \leq a$		$(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \operatorname{arctg} a + \pi k]$ $k \in \mathbb{Z}$

Решение неравенств вида
 $\operatorname{ctg} x > a$; $\operatorname{ctg} x \geq a$; $\operatorname{ctg} x < a$; $\operatorname{ctg} x \leq a$

Неравенство	Изображение решений	Ответ
$\operatorname{ctg} x > a$		$(\pi n; \operatorname{arctg} a + \pi n)$ $n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} x \geq a$		$(\pi n; \operatorname{arctg} a + \pi n]$ $n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} x < a$		$(\operatorname{arctg} a + \pi n; \pi + \pi n)$ $n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} x \leq a$		$[\operatorname{arctg} a + \pi n; \pi + \pi n)$ $n \in \mathbb{Z}$

A, B, C – углы треугольника (или $A + B + C = 180^\circ$)

$\sin A + \sin B$	$2 \cos \frac{A-B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}$
$\sin A - \sin B$	$2 \sin \frac{A-B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$
$\cos A + \cos B$	$2 \cos \frac{A+B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$
$\cos A - \cos B$	$2 \sin \frac{B-A}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}$
$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B$	$\frac{\sin C}{\cos A \cdot \cos B}$
$\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B$	$\frac{\sin C}{\sin A \cdot \sin B}$
$\sin A + \sin B + \sin C$	$4 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}$
$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C$	$\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C$
$\operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$	$\operatorname{ctg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$

**Замена умножения
тригонометрических
функций на сумму
(разность)**

$\sin \alpha \cdot \sin \beta =$ $= \frac{1}{2} \left[\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta) \right]$
$\cos \alpha \cdot \cos \beta =$ $= \frac{1}{2} \left[\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta) \right]$
$\sin \alpha \cdot \cos \beta =$ $= \frac{1}{2} \left[\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta) \right]$

**Формулы, применяе-
мые для решения
уравнений (универ-
сальная подстановка)**

$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$
$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$
$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$

**Формулы суммы и разности
тригонометрических функций**

$\sin \alpha + \sin \beta$	$2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$
$\sin \alpha - \sin \beta$	$2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$
$\cos \alpha + \cos \beta$	$2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$
$\cos \alpha - \cos \beta$	$-2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$
$\cos \alpha + \sin \alpha$	$\sqrt{2} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)$
$\cos \alpha - \sin \alpha$	$\sqrt{2} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)$
$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta$	$\frac{\sin (\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$
$\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta$	$\frac{\sin (\beta \pm \alpha)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$
$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta$	$\frac{\cos (\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \sin \beta}$
$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta$	$-\frac{\cos (\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \sin \beta}$
$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha$	$2 \operatorname{cosec} 2 \alpha$
$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha$	$-2 \operatorname{ctg} 2 \alpha$