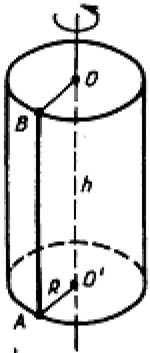
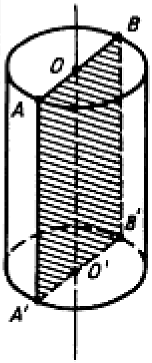
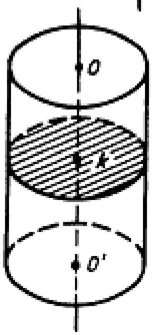
ЦИЛИНДР

Цилиндр, получаемый вращением прямоугольника $OO'AB$ вокруг прямой, содержащей сторону OO', перпендикулярные стороны $O'A$ и OB описывают основания цилиндра, а отрезок AB, параллельный OO' — боковую поверхность его. R — радиус основания цилиндра, h — его высота, равная образующей



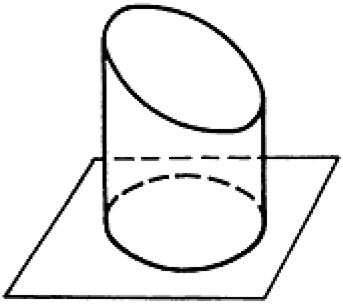
Прямоугольник $AA'B'B$ — осевое сечение цилиндра с осью OO'



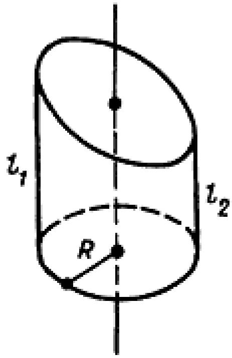


Круг k — поперечное сечение цилиндра с осью OO'

$$S_{бок} = 2\pi Rh$$
$$S_{осн} = \pi R^2$$
$$V = \pi R^2 h$$



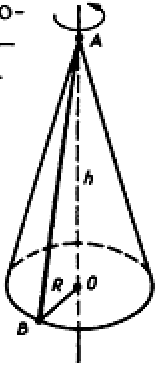
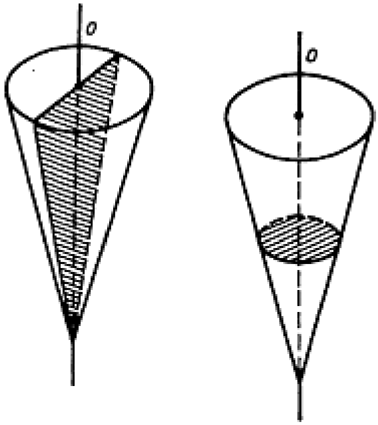
Усеченный цилиндр, общий вид.



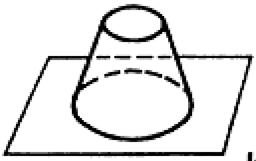
Усеченый цилиндр, R — радиус основания, l_1 и l_2 — наибольшая и наименьшая образующие.

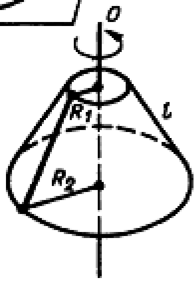
$$S_{бок} = \pi R(l_1 + l_2)$$

$$V = \pi R^2 \frac{l_1 + l_2}{2}$$

<table>
<tr><th colspan="2">КОНУС</th></tr>
<tr><td>Конус, получаемый вращением прямоугольного треугольника AOB вокруг прямой, содержащей катет AO, другой катет OB описывает основание конуса, а гипотенуза AB — его боковую поверхность, R — радиус основания конуса, h — высота его, l — образующая


Осевое сечение конуса с осью O — равнобедренный треугольник</td><td>$S_{бок} = \pi Rl$
$S_{осн} = \pi R^2$
$V_{кон} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$</td></tr>
</table>

Усеченный конус, общий вид



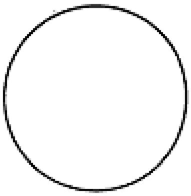


Усеченный конус, R_1 и R_2 — радиусы оснований, h — высота, l — отрезок образующей, O — ось

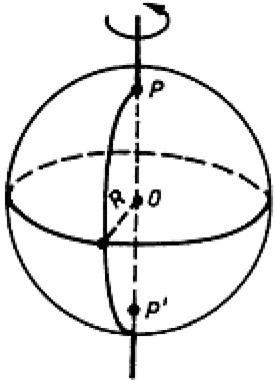
$$S_{бок} = \pi l(R_1 + R_2)$$

$$V = \frac{\pi h}{3}(R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2)$$

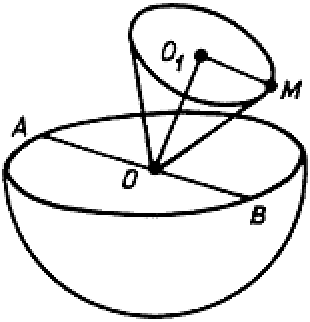
ШАР И ЕГО ЧАСТИ



Шар, общий вид

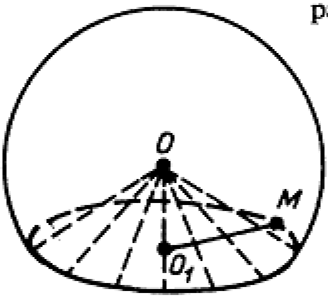


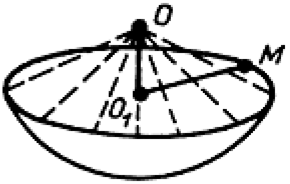
Шар, получаемый вращением полукруга, ограниченного дугой PkP', вокруг оси, содержащей диаметр PP', R — радиус полукруга (равный радиусу шара)

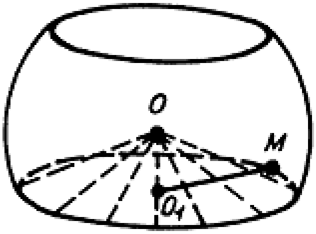


Полушарие и шаровой сектор с общим центром O, AB — диаметр полушария, O_1M — радиус сечения сектора

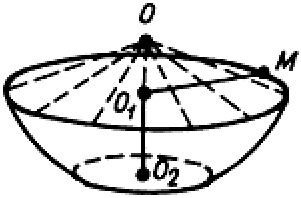
Два шаровых сегмента, OM — радиус, O_1M — радиус сечения



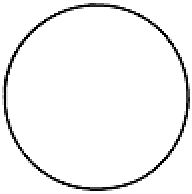
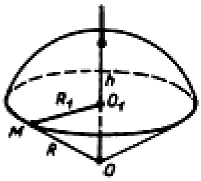
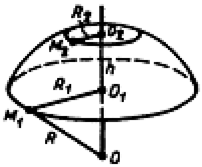
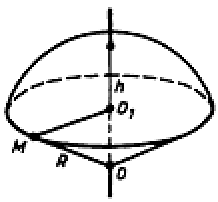




Два шаровых слоя, O — центр шара, O_1M — радиус одного из оснований слоя, O_1O_2 — высота слоя

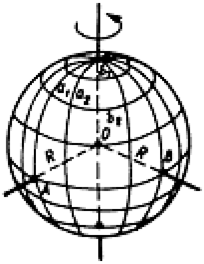


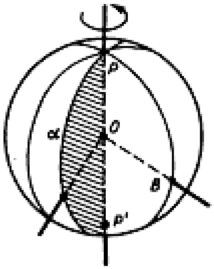
ОБЪЕМЫ И ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ШАРА И ЕГО ЧАСТЕЙ

	$S_{\text{пов.шара}} = 4\pi R^2$ $V_{\text{шара}} = \dfrac{4\pi R^3}{3}$
	$S_{\text{бок}} = 2\pi Rh = \pi Dh = \pi(R_1^2 + h^2)$ $S = \pi(2Rh + R_1^2) = \pi(h^2 + 2R_1^2)$ $R_1 = \sqrt{h(2R-h)}$ $V_{\text{сегм}} = \pi\left(R - \dfrac{h}{3}\right)h^2 = \dfrac{1}{6}\pi h\left(3R_1^2 + h^2\right) =$ $= \dfrac{1}{6}\pi h^2(3D + 2h)$
	h_1 и h_2 — высоты удаленных сегментов, так что $2R - h_1 - h_2 = h$
	$V_{\text{слоя}} = \dfrac{4}{3}\pi R^3 - \pi R\left(h_1^2 + h_2^2\right) - \dfrac{\pi}{3}\left(h_1^3 + h_2^3\right)$ $V_{\text{слоя}} = \dfrac{1}{6}\pi h\left(3R_1^2 + 3R_2^2 + h^2\right)$ $S_{\text{пояс}} = 2\pi Rh = \pi Dh$ $V_{\text{сект}} = \dfrac{2\pi R^2 h}{3} = \dfrac{\pi}{6}D^2 h$ $S_{\text{пов.сект}} = \pi R\left(2h + O_1M\right)$

СФЕРА И ПЛОСКОСТЬ (ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ)

Сфера — множество точек пространства, удаленных от данной точки на заданное расстояние



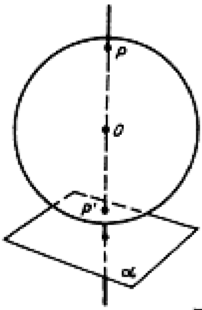


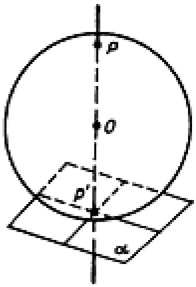
Точка O — центр сферы, OA, OB — ее радиусы, a_1, a_2 — меридианы, b_1, b_2 — параллели

$$S = 4\pi R^2$$

Сфера, получаемая вращением полуокружности PkP' вокруг оси, содержащей диаметр PP'

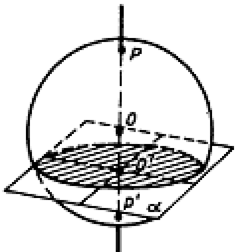
Плоскость α не имеет со сферой общих точек

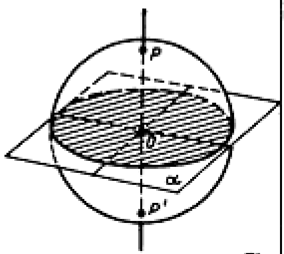




Плоскость α касается сферы в точке P' (полюсе)

Плоскость α пересекает сферу по окружности L_1 с центром O_1 на оси

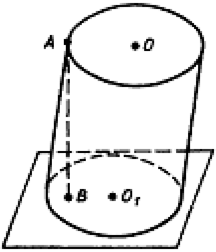


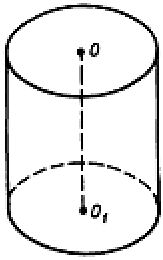


Плоскость α пересекает сферу (проходя через ее центр O) по большому кругу L_0 с тем же центром

ВЫСОТЫ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

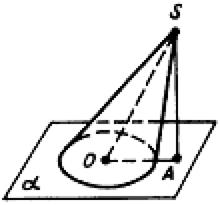
$AB \perp \alpha$;
AB — высота наклонного цилиндра; α — плоскость основания

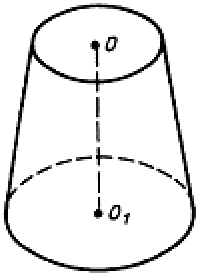


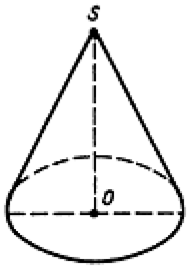


O и O_1 — центры оснований прямого кругового цилиндра; OO_1 — высота

SA — высота конуса; $SA \perp \alpha$



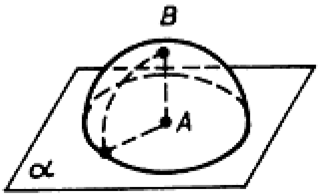


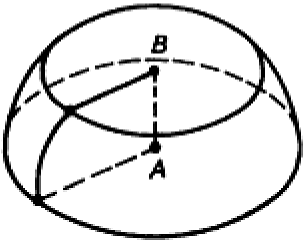


OO_1 — высота усеченного конуса

SO — высота прямого кругового конуса

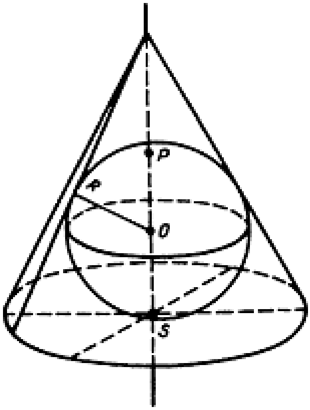
α — плоскость основания шарового сегмента, $AB \perp \alpha$, A — центр основания, AB — высота шарового сегмента



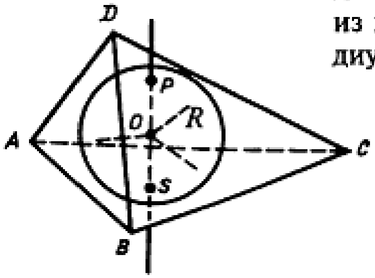


A и *B* — центры оснований шарового слоя, *AB* — высота шарового слоя

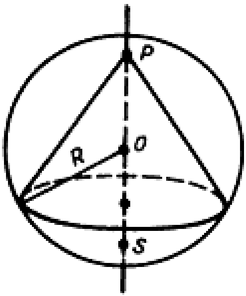
ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ТЕЛА



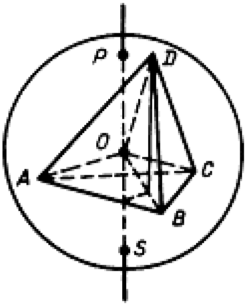
Сфера с центром *O* вписана в конус, она касается основания конуса в полюсе *S* (*P* — другой ее полюс) и образующей *l* его в точке, куда проведен радиус *R* сферы



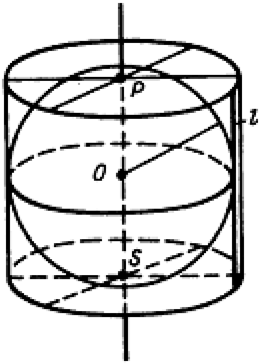
Сфера с центром *O* и полюсами *P* и *S* вписана в тетраэдр *ABCD*, штриховыми линиями из центра *O* обозначены радиусы этой сферы



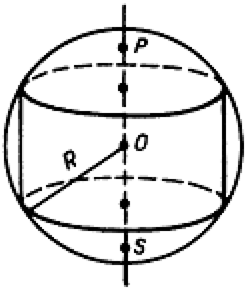
Конус вписан в сферу с центром *O* и полюсами *P* и *S*, сфера касается конуса по окружности его основания, в одну из точек которого проведен радиус *R*, и в вершине конуса *P*



Сфера с центром O и полюсами P и S описана около тетраэдра $ABCD$, штриховыми линиями из центра O обозначены радиусы этой сферы

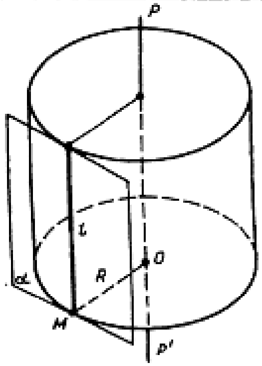
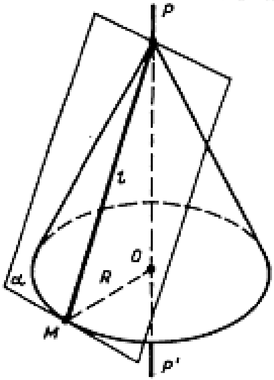
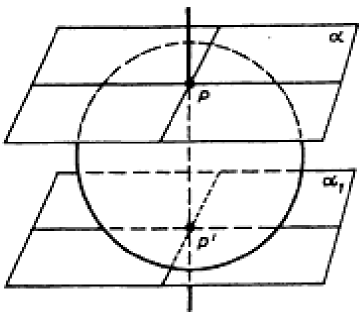


Сфера с центром O вписана в цилиндр, она касается оснований цилиндра в полюсах P и S и образующей l его в точке, куда проведен радиус R сферы

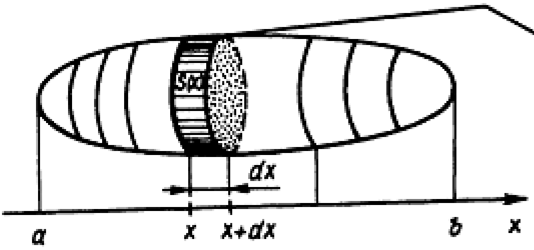


Цилиндр вписан в сферу с центром O и полюсами P и S, сфера касается цилиндра по окружностям его оснований, в одну из точек которых проведен радиус R

КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ К ТЕЛАМ ВРАЩЕНИЯ

	Цилиндр с касательной плоскостью имеет одну общую прямую — образующую Точка касания — любая точка образующей
	Конус с касательной плоскостью имеет одну общую прямую — образующую Точка касания — любая точка образующей Касательная плоскость перпендикулярна осевому сечению, проведенному через эту образующую
	Сфера с касательной плоскостью имеет одну общую точку (точка касания) *P* и *P'* — диаметрально противоположные точки, $\alpha \parallel \alpha_1$ Касательная плоскость и радиус сферы, проведенный в точку касания, перпендикулярны

ОБЪЕМЫ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ



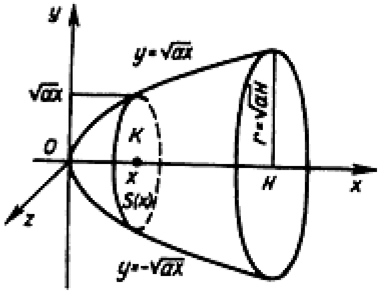
$$V = \int_a^b S(x)dx$$

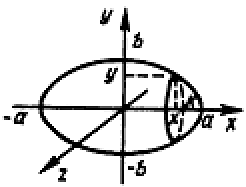
Площадь сечения тела плоскостью, проходящей через точку X оси $0X$ перпендикулярно этой оси

ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ ОБЪЕМОВ:

$$V = \int_0^H S(x)dx,$$

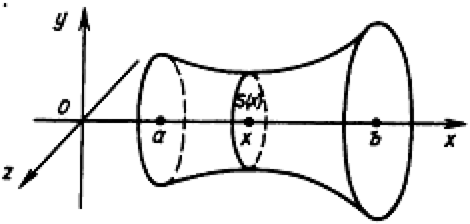
где $S(x) = \pi\left(\sqrt{ax}\right)^2 = \pi ax$





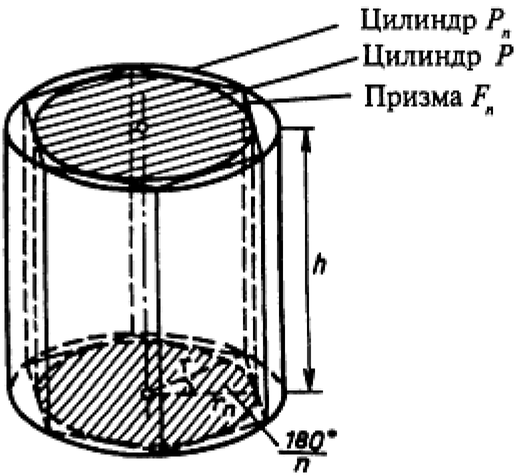
$$V = \int_{-a}^{a} S(x)dx,$$

где $S(x) = \pi y^2 = \pi b^2 - \dfrac{\pi b^2}{a^2}x^2$



$$V = \int_a^b S(x)dx$$

ОБЪЕМ ЦИЛИНДРА С РАДИУСОМ ОСНОВАНИЯ r, ВЫСОТОЙ h



ТЕОРЕМА:

$$V_ц = \pi r^2 h$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

S_n — площадь основания призмы

$S_n \cdot h$ — объем призмы

$V_n < S_n \cdot h < V$, где V_n — объем цилиндра P_n, V — объем цилиндра P

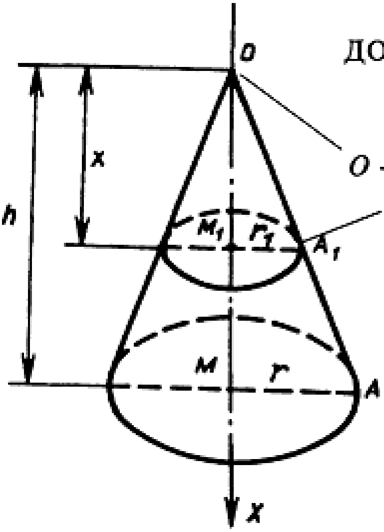
$r_n = r\cos\frac{180°}{n} \to r$ при $n \to \infty$ и $V_n \to V$. Значит,

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n \cdot h = V$, но $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \cdot h = \pi r^2$, поэтому $V = \pi r^2 h$

ОБЪЕМ КОНУСА С РАДИУСОМ ОСНОВАНИЯ r, ВЫСОТОЙ h И ВЕРШИНОЙ В ТОЧКЕ O

ТЕОРЕМА:

$$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

O — начало координат

Сечение конуса — круг (M_1, r_1), его площадь $S(x)$, где x — абсцисса т.M_1

$\Delta OM_1A_1 \sim OMA$

$$\frac{OM_1}{OM} = \frac{r_1}{r}, \text{ т.е. } \frac{x}{h} = \frac{r_1}{r}$$

Значит, $r_1 = \dfrac{r}{h}x$

$$S(x) = \pi r_1^2 = \pi \frac{r^2}{h^2}x^2$$

Пределы интегрирования o и h

$$V_{\text{кон}} = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h \pi \frac{r^2}{h^2}x^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

СЛЕДСТВИЕ:

$$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}S_{\text{осн}}h$$

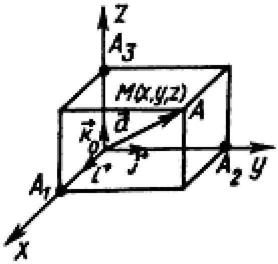
КООРДИНАТЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

Длина вектора

$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

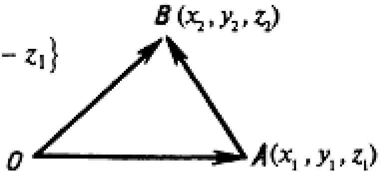
$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}$

$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$



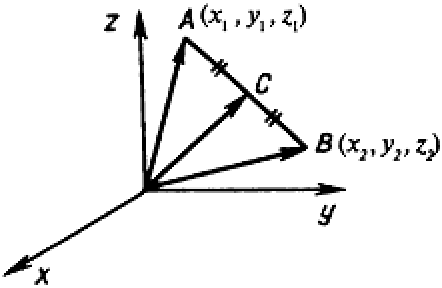
Координаты вектора

$\overrightarrow{AB}\ \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$

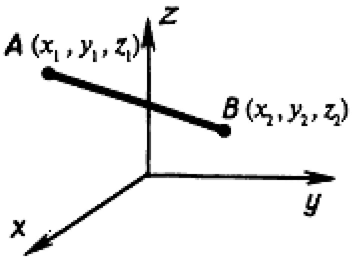


Координаты середины отрезка

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$



Расстояние между двумя точками

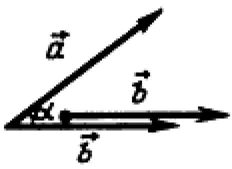


$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Скалярное произведение векторов

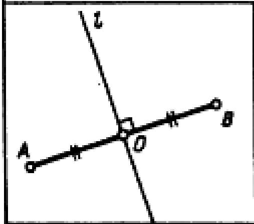
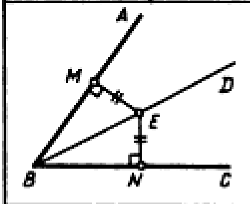
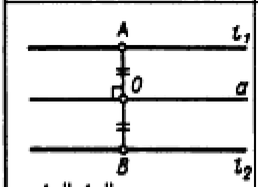
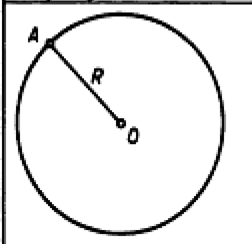
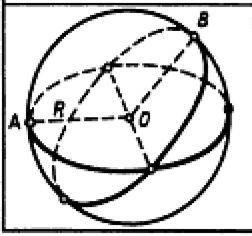
$\vec{a}\,\{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b}\,\{x_2, y_2, z_2\}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$



Косинус угла между ненулевыми векторами

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МЕСТО ТОЧЕК (ГМТ)	
ГМТ — множество точек, обладающих каким-то общим для них свойством	
	l — ГМТ, равноудаленных от A и B на плоскости
	$[BD]$ — ГМТ, равноудаленных от сторон угла ABC
 $l_1 \parallel l_2 \parallel a$	l_1 и l_2 — ГМТ, равноудаленных от прямой a на плоскости
	Окр. (O, R) — ГМТ, равноудаленных от данной точки (O) на данное расстояние (R) на плоскости
	Сфера $(O; R)$ — ГМТ, равноудаленных от данной точки (O) на данное расстояние (R) в пространстве