Решение показательных уравнений

Показательные уравнения

- **Определение.** Уравнение, содержащее переменную в показателе степени, называется показательным
- Простейшее показательное уравнение $a^x=b$, где $a>0$, $a\neq 1$
- $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ $(a\neq 1;\ a>0)$ равносильно уравнению $f(x)=g(x)$
- $A\cdot a^{2x}+B\cdot a^x+C=0$ подстановкой $a^x=y$ сводится к квадратному уравнению $Ay^2+By+C=0$

Примеры

1. Решить уравнение:

$$3^{x^2-\frac{5}{7}x}=\sqrt[7]{9},$$

$$3^{x^2-\frac{5}{7}x}=3^{\frac{2}{7}},$$

$$x^2-\frac{5}{7}x=\frac{2}{7},$$

$$7x^2-5x-2=0,$$

$$x_1=-\frac{2}{7};\quad x_2=1.$$

Ответ: $-\frac{2}{7}$; 1.

2. Решить уравнение:

$$3\cdot 16^x+2\cdot 81^x=5\cdot 36^x$$

Разделим обе части уравнения на $36^x\neq 0$.

$$3\cdot\left(\frac{16}{36}\right)^x+2\cdot\left(\frac{81}{36}\right)^x=5,$$

$$3\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^x+2\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^x=5.$$

Пусть $\left(\frac{4}{9}\right)^x=y$. Тогда

$$3y+\frac{2}{y}=5,\ \text{т. е.}$$

$$3y^2-5y+2=0,$$

$$y_1=1;\ y_2=\frac{2}{3}.$$

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x=1\ \text{или}\ \left(\frac{4}{9}\right)^x=\frac{2}{3},$$

$$x=0;\qquad x=\frac{1}{2}.$$

Ответ: 0; $\frac{1}{2}$.

Решение показательных неравенств

Показательные неравенства

Определение. Неравенство, содержащее переменную в показателе степени, называется показательным

$a^{f(x)} < a^{g(x)}$ (где $a > 0$; $a \neq 1$)

- $a > 1$: $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ равносильно $f(x) < g(x)$
- $0 < a < 1$: $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ равносильно $f(x) > g(x)$

Примеры

1. Решить неравенство:

$3^x < \frac{1}{9}$,

$3^x < 3^{-2}$.

Так как $3 > 1$, то $x < -2$.

Ответ: $(-\infty;\ -2)$

2. Решить неравенство:

$(0{,}25)^{6x - x^2} > 0{,}25^5$

Так как $0 < 0{,}25 < 1$, то $6x - x^2 < 5$, т. е. $x^2 - 6x + 5 > 0$,

$(x-1)\cdot(x-5) > 0$,

$x \in (-\infty;\ 1) \cup (5;\ \infty)$.

Ответ: $(-\infty;\ 1) \cup (5;\ \infty)$

3. Решить неравенство:

$4^x - 6\cdot 2^x + 8 < 0$

Пусть $2^x = y$. Тогда $4^x = (2^x)^2 = y^2$.

$y^2 - 6y + 8 < 0$,

т. е. $2 < y < 4$.

$y = 2^x$, поэтому $2 < 2^x < 4$,

$2^1 < 2^x < 2^2$,

$2 > 1$, значит, $1 < x < 2$.

Ответ: $(1;\ 2)$

Решение логарифмических уравнений

Логарифмическое уравнение

Определение.
Уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма, называется логарифмическим

Простейшее логарифмическое уравнение
$\log_a x = b$, где $a > 0$; $a \neq 1$

$\log_a f(x) = \log_a g(x)$
равносильно системе:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

или

Полученные корни подставляют в исходное уравнение для исключения посторонних корней

При решении уравнений полезен метод введения новой переменной

При решении уравнений, содержащих переменную и в основании, и в показателе степени, используется метод логарифмирования

Примеры

Решить уравнение:

1) $\log_{\sqrt[3]{4}}(x-1)=6$,

$x-1>0$, т. е. $x>1$.

По определению логарифма:

$x-1=(\sqrt[3]{4})^6$,

$x-1=4^2$,

$x=17$.

Ответ: 17

2) $\log_x 5\sqrt{5}-1{,}25=\log_x{}^2\sqrt{5}$,

$$\log_x 5^{\frac{3}{2}}-\frac{5}{4}=\left(\log_x 5^{\frac{1}{2}}\right)^2,$$

$$\frac{3}{2}\log_x 5-\frac{5}{4}=\left(\frac{1}{2}\log_x 5\right)^2.$$

Пусть $\log_x 5=y$, тогда

$$\frac{3y}{2}-\frac{5}{4}=\frac{y^2}{4},$$

$y^2-6y+5=0$,

$y_1=1$ или $y_2=5$.

$\log_x 5=1$ или $\log_x 5=5$.

$x=5$ или $x=\sqrt[5]{5}$.

Ответ: 5; $\sqrt[5]{5}$

3) $x^{\log_2 x+2}=8$

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 2:

$\log_2(x^{\log_2 x+2})=\log_2 8$,

$(\log_2 x+2)\cdot\log_2 x=3$.

Пусть $\log_2 x=y$.

Тогда

$y^2+2y-3=0$,

$y=1$ или $y=-3$.

$\log_2 x=1$ или $\log_2 x=-3$.

$x=2$ или $x=\frac{1}{8}$.

Ответ: 2; $\frac{1}{8}$

Решение логарифмических неравенств

Логарифмическое неравенство

→ **Определение.** Неравенство, содержащее переменную только под знаком логарифма

→ $\log_a f(x) > \log_a \varphi(x)$

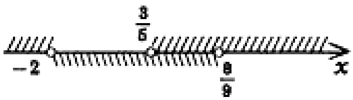
- $f(x) > \varphi(x) > 0$ при $a \in (1;\ \infty)$
- $0 < f(x) < \varphi(x)$ при $a \in (0;\ 1)$

Пример

$$\log_{0,5}\frac{5x-3}{x+2} > \log_{0,5}0,5 \iff \begin{cases} \dfrac{5x-3}{x+2} > 0 \\ \dfrac{5x-3}{x+2} < 0,5 \end{cases}$$

Далее имеем: $\begin{cases} \dfrac{5x-3}{x+2} > 0 \\ \dfrac{5x-3-0,5(x+2)}{x+2} < 0 \end{cases}$; $\begin{cases} \dfrac{5x-3}{x+2} > 0 \\ \dfrac{4,5x-4}{x+2} < 0 \end{cases}$

Решение системы:



Ответ: $\dfrac{3}{5}; \dfrac{8}{9}$