Свойства степеней

Для любых m, n и $a>0, b>0$ верны равенства:

$$a^0=1;\quad a^m\cdot a^n=a^{m+n};\quad a^m:a^n=a^{m-n};$$
$$\left(a^m\right)^n=a^{mn};\quad (ab)^n=a^n b^n;$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n};\quad a^{-n}=\frac{1}{a^n}$$

Модуль

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a, \text{если } a\ge 0,\\ -a, \text{если } a<0\end{cases}$$

Основные свойства модуля:

$$|a|\ge 0;\quad |a|-|b|\le|a\pm b|\le|a|+|b|;$$
$$|-a|=|a|;\quad |a-b|=|b-a|.$$

Формулы сокращенного умножения

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3 \quad \textit{или}$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm b^3\pm 3ab(a\pm b);$$
$$a^2-b^2=(a-b)(a+b);$$
$$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\pm ab+b^2);$$
$$(a\pm b\pm c)^2=a^2+b^2+c^2\pm$$
$$\pm 2ab\pm 2ac+2bc;$$

$$(a\pm b)^2=(a\pm b)(a\pm b);$$
$$(a-b)^2=(b-a)^2$$

Свойства арифметических корней

Для любых натуральных n и k, больших 1, и любых $a\ge 0$ и $b\ge 0$ верны равенства:

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b};\quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\sqrt[n]{a^k};$$
$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\ (b\ne 0);\quad \sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[nk]{a};$$
$$\sqrt[n]{a}=\sqrt[nk]{a^k};\quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a;$$
$$\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}, \text{если } 0\le a<b;$$
$$\sqrt[2n]{a^{2n}}=|a|;\quad \sqrt[2n+1]{-a}=-\sqrt[2n+1]{a}$$

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m},\ m\in Z, n\in N$$

Если $m<0$, то $a>0$, если $m>0$, то $a\ge 0$

Начала математического анализа

Прогрессии

1. *Арифметическая* ($\div$)

(a_1 – первый член, d – разность, n – число членов, a_n – n-й член, S_n – сумма n первых членов)

$$a_n=a_1+d(n-1);\quad a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2};$$
$$d=a_{n+1}-a_n;\quad d=\frac{a_n-a_m}{n-m},\ (n\ne m);$$
$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n;$$
$$a_n+a_m=a_p+a_q, \text{где } n+m=p+q.$$

2. *Геометрическая* ($\because\because$)

b_1 – первый член, b_n – n-й член $(b_n\ne 0)$, n – число членов, q – знаменатель ($q\ne 0$), S_n – сумма n первых членов

$$b_n=b_1\cdot q^{n-1};\quad b_n^2=b_{n-1}\cdot b_{n+1},\ b_n\ne 0;$$
$$S_n=\frac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q}=\frac{b_1-b_nq}{1-q} \text{ при } q\ne 1;$$
$$S_n=n\cdot b_1 \text{ при } q=1;$$
$$q=\frac{b_{n+1}}{b_n};\quad q^{n-m}=\frac{b_n}{b_m};$$
$$b_nb_m=b_pb_q, \text{где } n+m=p+q$$

Сумма бесконечной геометрической прогрессии $S=\dfrac{b_1}{1-q},\quad |q|<1$

Сравнение средних величин n положительных чисел

$(a_i>0, n\in Z)$

Среднее арифметическое $\dfrac{a_1+a_2+K+a_n}{n}$

Среднее геометрическое $\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot K\cdot a_n}$

$$\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot K\cdot a_n}\le\frac{a_1+a_2+K+a_n}{n}$$

Производная

Производные некоторых функций

(a, b, k, C – постоянные)

$$C'=0;\quad (kx+b)'=k;$$
$$x'=1;\quad \left(x^n\right)'=n\cdot x^{n-1};$$
$$(\sin x)'=\cos x;\quad (\cos x)'=-\sin x;$$
$$(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x};\quad (\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x};$$
$$(\ln x)'=\frac{1}{x};\quad (\log_a x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a};$$
$$\left(e^x\right)'=e^x;\quad \left(a^x\right)'=a^x\cdot\ln a;$$
$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\ (\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$
$$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2};\ (\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$$

Правила дифференцирования

(u, v – функции, C – постоянная)

$$(Cv)'=Cv';\quad (u+v)'=u'+v';$$
$$(uv)'=u'v+uv';\quad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2};$$
$$\left(g(f(x))\right)'=g'(f(x))\cdot f'(x),$$

где $g(f(x))$ *– сложная функция.*

Геометрический смысл производной

$$f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha=k$$

Значение производной функции в точке равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке.

Физический смысл производной

$$v(t)=s'(t)$$

Скорость – производная от координаты по времени.

$$a(t)=v'(t)$$

Ускорение – производная от скорости по времени.

Уравнение касательной

Уравнение касательной к графику функции f в точке графика с абсциссой x_0

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

Первообразная и интеграл

Таблица первообразных некоторых функций

(a, k, C – постоянные)

Функция f(x)	Первообразная F(x)
k	$kx+C$
$x^n, (n\in Z, n\ne -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+C$
$\sin x$	$-\cos x+C$
$\cos x$	$\sin x+C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x+C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x+C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+C$
e^x	e^x+C
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}+C$

Правила нахождения первообразных:

1. Если F – первообразная для f, а G – первообразная для g, то $F+G$ есть первообразная для $f+g$.
2. Если F – первообразная для f, а k – постоянная, то функция kF есть первообразная для kf.
3. Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, а $k\ne 0$ и b – постоянные, то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ есть первообразная для $f(kx+b)$.

Формула Ньютона – Лейбница

Если F – первообразная для f на $[a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

Некоторые свойства интеграла

$$\int_a^b kf(x)\,dx=k\cdot\int_a^b f(x)\,dx;$$
$$\int_a^b\left(f(x)+g(x)\right)dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$$

Тригонометрия

Основные формулы

$\sin^2 x+\cos^2 x=1;\quad 1+\operatorname{tg}^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x},\ x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;$

$\operatorname{tg} x=\dfrac{\sin x}{\cos x},\ x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;\quad \operatorname{ctg} x=\dfrac{\cos x}{\sin x},\ x\neq\pi n,\ n\in Z;$

$\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} x=1,\ x\neq\dfrac{\pi n}{2},\ n\in Z;\quad 1+\operatorname{ctg}^2 x=\dfrac{1}{\sin^2 x},\ x\neq\pi n,\ n\in Z.$

Формулы сложения

$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y;$

$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y;$

$\operatorname{tg}(x\pm y)=\dfrac{\operatorname{tg} x\pm\operatorname{tg} y}{1\mp\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y},\ x,\ y,\ x\pm y\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$

Формулы для кратных углов

$\sin 2x=2\sin x\cos x;\quad \sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x;$

$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x;$

$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x;\quad \operatorname{tg} 2x=\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x},\ x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$

Формулы половинного аргумента

$\sin^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1-\cos x}{2};\quad \cos^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1+\cos x}{2};$

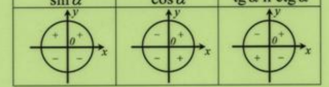
$\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}=\dfrac{1-\cos x}{\sin x},\ x\neq\pi+2\pi n,\ n\in Z$

Формула дополнительного угла

$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi),$ где $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$

Знаки тригонометрических функций

$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$



Формулы преобразования суммы в произведение

$\sin x+\sin y=2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2};$

$\sin x-\sin y=2\sin\dfrac{x-y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2};$

$\cos x+\cos y=2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2};$

$\cos x-\cos y=-2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2};$

$\operatorname{tg} x\pm\operatorname{tg} y=\dfrac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cos y},\ x,\ y\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;$

$\operatorname{ctg} x\pm\operatorname{ctg} y=\dfrac{\sin(y\pm x)}{\sin x\sin y},\ x,\ y\neq\pi n,\ n\in Z$

Формулы преобразования произведения в сумму

$\sin x\cdot\sin y=\dfrac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y));$

$\cos x\cdot\cos y=\dfrac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y));$

$\sin x\cdot\cos y=\dfrac{1}{2}(\sin(x-y)+\sin(x+y))$

Универсальная подстановка

$\cos x=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)},\quad \sin x=\dfrac{2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)},$

$x\neq\pi+2\pi n,\ n\in Z$

Формулы приведения

α	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$
$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$

Арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс

$\arcsin(-x)=-\arcsin x;\quad \arccos(-x)=\pi-\arccos x;$

$\operatorname{arctg}(-x)=-\operatorname{arctg} x;\quad \operatorname{arcctg}(-x)=\pi-\operatorname{arcctg} x;$

$\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$ при $|x|\le 1;\quad \operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x=\dfrac{\pi}{2};$

$\sin(\arcsin x)=x$ при $|x|\le 1;\quad \cos(\arccos x)=x,$ если $|x|\le 1;$

$\arcsin(\sin x)=x$ при $|x|\le\dfrac{\pi}{2};\quad \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)=x$ при $|x|<\dfrac{\pi}{2};$

$\arccos(\cos x)=x$ при $0\le x\le\pi;\ \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)=x$ при $x\in R;$

$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)=x;\quad \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)=x,$ если $0<x<\pi.$

α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin\alpha$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\arccos\alpha$	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$	0

α	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg}\alpha$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
$\operatorname{arcctg}\alpha$	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$

Значения тригонометрических функций некоторых углов

α°	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
α, рад	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	–	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	0	–