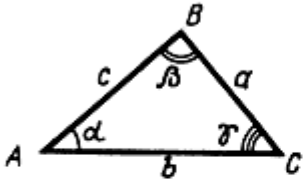
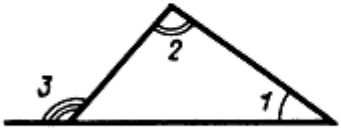
ТРЕУГОЛЬНИК

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

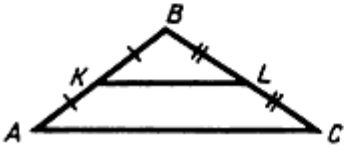


Три стороны, три угла — элементы треугольника

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

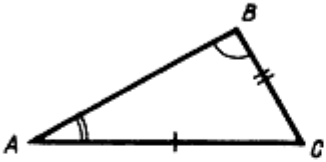


$$\angle 1 + \angle 2 = \angle 3$$

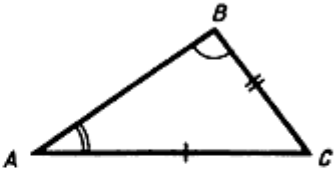


$$KL \parallel AC,\ KL = \frac{1}{2}AC$$

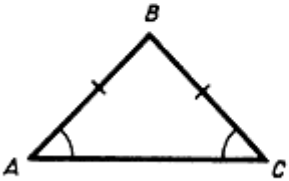
ТЕОРЕМЫ О СООТНОШЕНИЯХ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКОВ



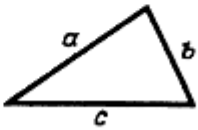
Если $AC > BC$, то $\angle B > \angle A$



Если $\angle B > \angle A$, то $AC > BC$



Если $\angle A = \angle C$, то $BC = BA$



$a < b+c$

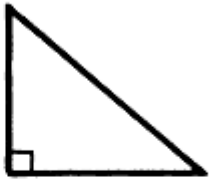
$b < a+c$

$c < b+a$

ВИДЫ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Остроугольный
(все углы острые)

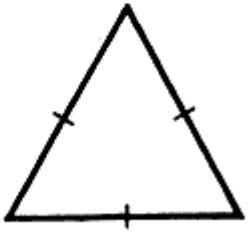
Тупоугольный
(один угол тупой)



Прямоугольный
(один угол равен 90°)

Разносторонний
(нет равных сторон)

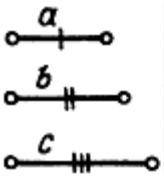
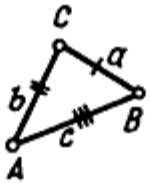
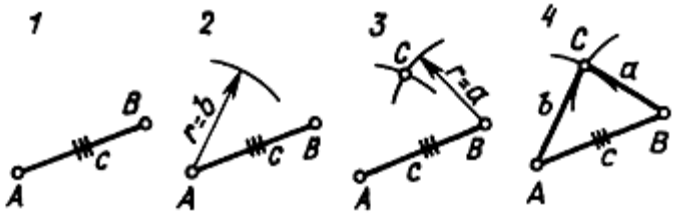
Равнобедренный
(две стороны равны)



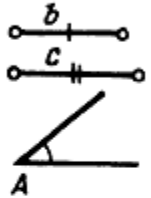
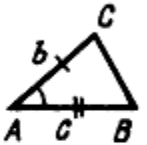
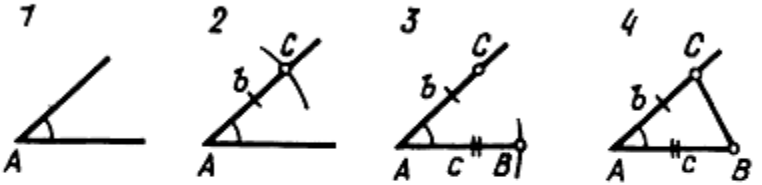
Равносторонний
(все стороны равны)

ПОСТРОЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА

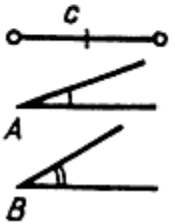
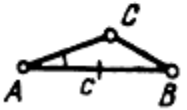
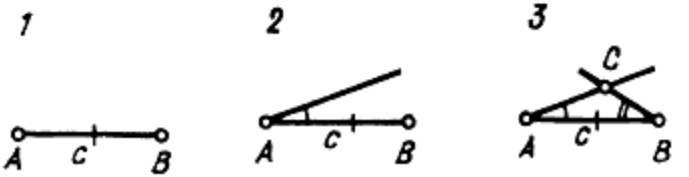
ПОСТРОЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА ПО ТРЕМ СТОРОНАМ

Дано	Требуется построить	Построение
		

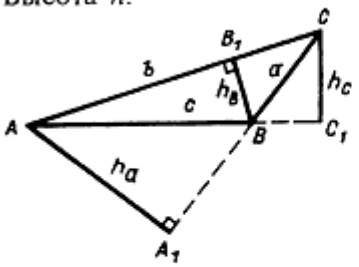
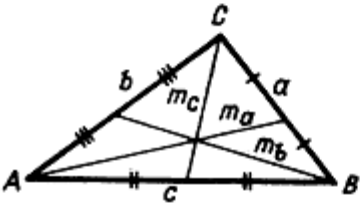
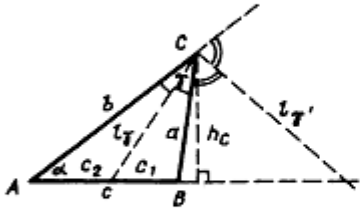
ПОСТРОЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА ПО ДВУМ СТОРОНАМ И УГЛУ МЕЖДУ НИМИ

Дано	Требуется построить	Построение
		

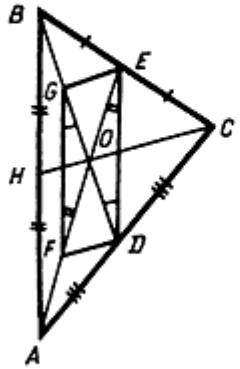
ПОСТРОЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА ПО СТОРОНЕ И ПРИЛЕЖАЩИМ К НЕЙ УГЛАМ

Дано	Требуется построить	Построение
		

ВЫСОТА, МЕДИАНА, БИССЕКТРИСА

Высота h: 	$h_a = \frac{2S_{треуг}}{a}$, где $S_{треуг}$ — площадь ΔABC $h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} =$ $= bc : ac : ab$
Медиана m: 	$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$ $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}$ $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$ $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 +$ $+ b^2 + c^2)$
Биссектриса l: 	$\frac{c_2}{c_1} = \frac{b}{a}$ $l_\alpha = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$ $l_{\gamma'} = \frac{2}{\lvert b-c \rvert}\sqrt{bc(p-c)(p-b)}$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$ $\angle(h_c; l_\gamma) = \frac{\beta - \alpha}{2}$ $\angle(h_c; l_{\gamma'}) = 90° - \frac{\beta - \alpha}{2}$

ТЕОРЕМА О ПЕРЕСЕЧЕНИИ МЕДИАН ТРЕУГОЛЬНИКА



$$\frac{OH}{OC} = \frac{OD}{OB} = \frac{OE}{OA} = \frac{1}{3}$$

Доказательство:

$$AE \cap BD = \{O\}$$

$$\left.\begin{matrix} F; OF = FA, \\ G; OG = GB \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} FG = \frac{1}{2}AB, \\ FG \parallel AB \end{matrix}\right\}$$

$$\left.\begin{matrix} BE = EC, \\ AD = DC \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} DE = \frac{1}{2}AB, \\ DE \parallel AB \end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} DE \parallel FG \\ DE = FG \end{matrix}\right\} \Rightarrow DEFG -$$

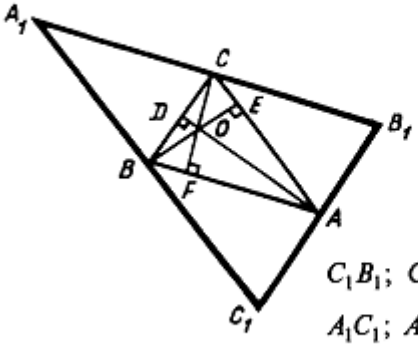
параллелограмм $\Rightarrow$

$$\left.\begin{matrix} OF = OE, \\ OG = OD \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} OE = \frac{1}{3}AE, \\ OD = \frac{1}{3}BD \end{matrix}$$

Аналогичные рассуждения проводятся с третьей медианой

ТЕОРЕМЫ О ПЕРЕСЕЧЕНИИ ВЫСОТ И БИССЕКТРИС ТРЕУГОЛЬНИКОВ

$AD \cap CF = \{O\}, AD \cap BE = \{O\}, CF \cap BE = \{O\}$



Доказательство:

$C_1B_1;\ C_1B_1 \parallel CB;\ DA \perp C_1B_1$

$A_1C_1;\ A_1C_1 \parallel AC;\ EB \perp A_1C_1$

$A_1B_1;\ A_1B_1 \parallel AB;\ FC \perp A_1B_1$

1) $C_1B = AC = BA_1$,

$$\left.\begin{array}{l} ACBC_1 \text{ — параллелограмм} \\ A_1CAB \text{ — параллелограмм} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} BC_1 = CA \\ A_1B = CA \end{array}\right\} \Rightarrow BC_1 = A_1B$$

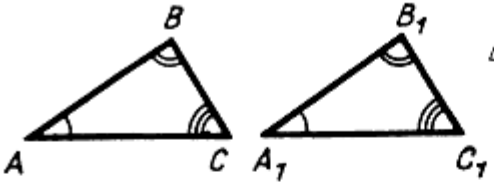
Аналогично: 2) $A_1C = CB_1$
3) $B_1A = AC_1$

Значит, высоты AD, BE и CF перпендикулярны к сторонам $\Delta A_1B_1C_1$ и проходят через их середины, и такие перпендикуляры пересекаются в одной точке

ТЕОРЕМА О БИССЕКТРИСАХ УГЛОВ

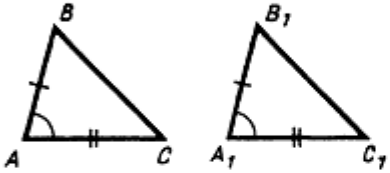
Три биссектрисы углов треугольника пересекаются в одной точке, являющейся центром вписанной окружности

РАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКОВ



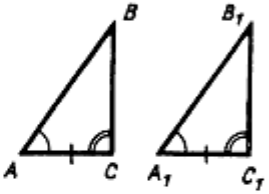
$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ



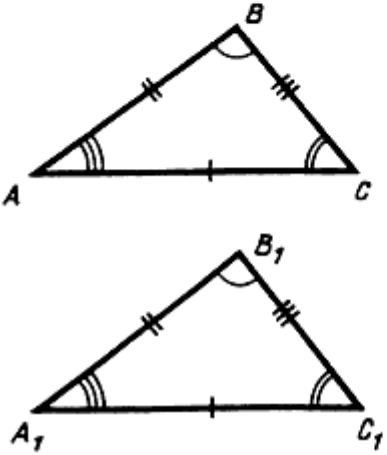
$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

ВТОРОЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ



$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

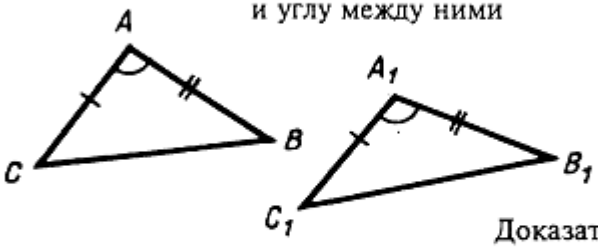
ТРЕТИЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ



$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

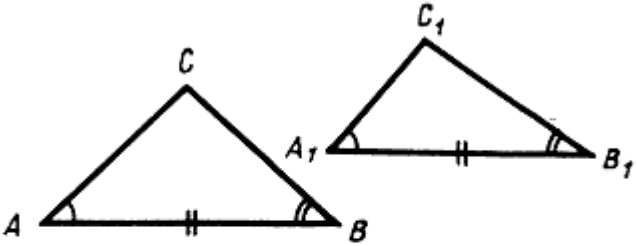
Равенство треугольников по двум сторонам и углу между ними



Доказательство:

Наложим ΔABC на $\Delta A_1B_1C_1$ так, чтобы A совпадала с A_1, AC лежало на $[A_1C_1)$, но эти стороны равны, поэтому C совместится с C_1. $\angle A = \angle A_1$, поэтому AB лежит на $[A_1B_1)$, но эти стороны равны, поэтому B совпадет с B_1, значит, CB совместится с C_1B_1 и треугольники совпадут

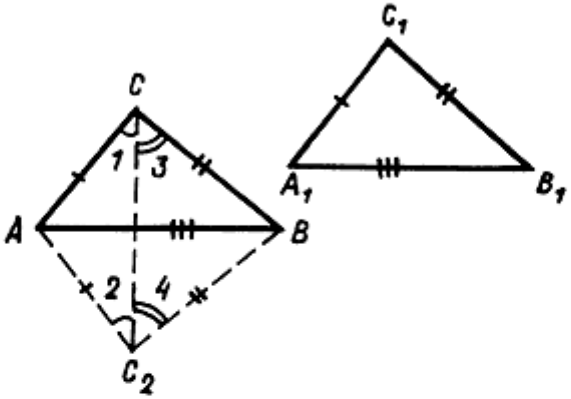
Равенство треугольников по стороне и двум прилежащим к ней углам



Доказательство:

Наложим $\Delta A_1B_1C_1$ на ΔABC: $A_1 \to A$, $B_1 \to B$, A_1C_1 пошла по AC. $\angle B = \angle B_1 \to B_1C_1$ пойдет по BC, $[A_1C_1) \to [AC)$, $[B_1C_1) \to [BC)$. Так как $C_1 = [A_1C_1) \cap [B_1C_1)$, $C = [AC) \cap [BC)$, то $C_1 \to C$. Итак, $\Delta A_1B_1C_1 \to \Delta ABC$ (т.е. можно совместить). $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta ABC$

Равенство треугольников по трем сторонам

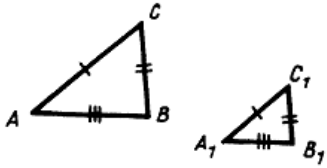


Доказательство:

Приложим к $\Delta ABC \to \Delta A_1B_1C_1$: $A_1 \to A$, $B_1 \to B$, $\Delta A_1B_1C_1 \to \Delta ABC_2$. Соединив C и C_2, получим ΔACC_2 и ΔBCC_2 — равнобедренные; $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$. Если $AB \cap CC_2$, то $\angle ACB = \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 = \angle AC_2B$, значит, $\Delta ABC = \Delta ABC_2$ (по двум сторонам и углу между ними).

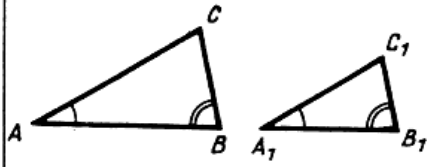
Если AB и CC_2 не пересекаются, то $\angle ACB = |\angle 3 - \angle 1|$, а $\angle AC_2B = |\angle 4 - \angle 2|$. Итак, $\angle ACB = \angle AC_2B$, т.е. $\Delta ABC \to \Delta ABC_2$. По построению $\Delta ABC_2 = \Delta A_1B_1C_1$, значит, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ



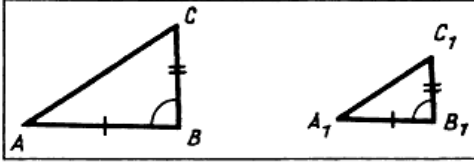
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$



$\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$



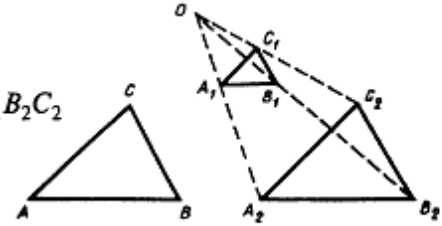
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}, \ \angle B = \angle B_1$$

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

ПРИЗНАКИ ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ. ТЕОРЕМА ФАЛЕСА

1) $k = \dfrac{AB}{A_1B_1}$

$H_0^k(\Delta A_1B_1C_1) = \Delta A_2B_2C_2$



$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

2) $\Delta A_2B_2C_2 = \Delta ABC$:

$A_2B_2 = kA_1B_1 = AB$, $\angle A_2 = \angle A_1 = \angle A$, $\angle B_2 = \angle B_1 = \angle B$ (по стороне и прилежащим к ней углам)

3) $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

1) $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$

1) — || —

2) $\Delta A_2B_2C_2 = \Delta ABC$:

$A_2B_2 = kA_1B_1 = AB$,

$A_2C_2 = kA_1C_1 = AC$,

$\angle A_2 = \angle A_1 = \angle A$

(по двум сторонам и углу между ними)

3) $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

2) $\dfrac{CA}{C_1A_1} = \dfrac{BA}{B_1A_1}$, $\angle A = \angle A_1$

1) — || —

3) $\dfrac{CA}{C_1A_1} = \dfrac{BA}{B_1A_1} = \dfrac{CB}{C_1B_1}$

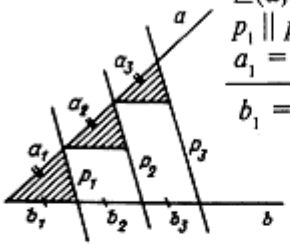
2) $\Delta A_2B_2C_2 = \Delta ABC$:

$A_2B_2 = kA_1B_1 = AB$, $A_2C_2 = kA_1C_1 = AC$,

$B_2C_2 = kB_1C_1 = BC$ (по трем сторонам)

3) $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

ТЕОРЕМА ФАЛЕСА



$\angle(a,b)$

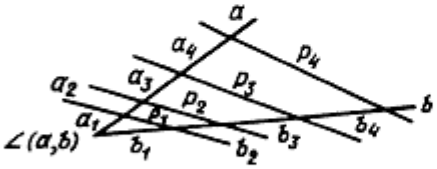
$p_1 \parallel p_2 \parallel p_3 \parallel \ldots$

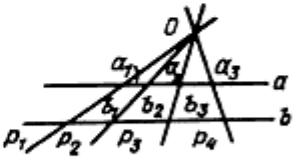
$a_1 = a_2 = a_3 \ldots$

$b_1 = b_2 = b_3 \ldots$

Доказательство ведется через равенство заштрихованных треугольников

Обобщение теоремы:





$\angle(a,b)$,

$p_1 \parallel p_2 \parallel p_3 \parallel \ldots$

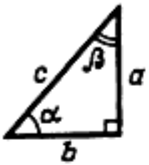
$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots$$

$O \notin a, O \notin b, a \parallel b$

$O \in p_1, O \in p_2, O \in p_3$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots$$

ОСНОВНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ



Синус: $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$

Косинус: $\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

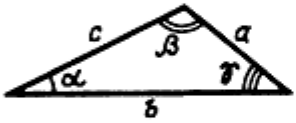
$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$

$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$

$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$



Теорема косинусов

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Теорема синусов

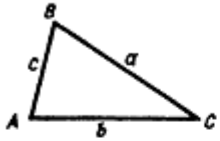
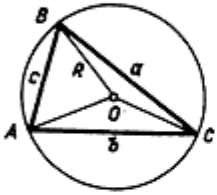
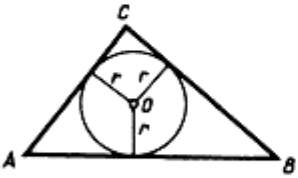
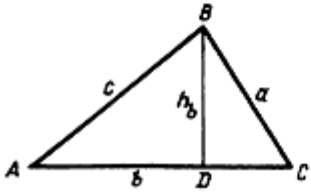
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

где R — радиус описанной окружности

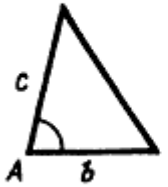
Теорема тангенсов

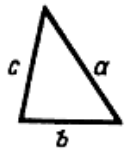
$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\gamma}{2}} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\gamma}{2}}; \qquad \frac{b+c}{b-c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}}$$

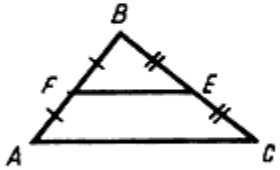
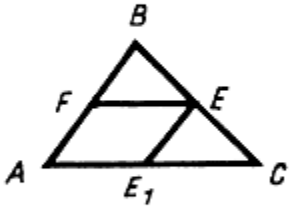
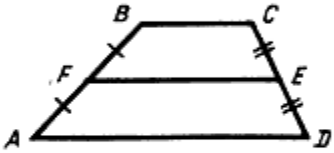
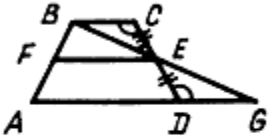
ПРОИЗВОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК	
ИЗОБРАЖЕНИЕ	ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ
	**Теорема косинусов:** $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
	**Теорема синусов:** $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ $R = \frac{abc}{4S}$
	$r = \frac{S}{p}$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$
	$S_{ABC} = \frac{1}{2} b \cdot h_b$; $S_{ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A$ **Формула Герона:** $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$. Если $a = b = c$, то $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ (ПРОИЗВОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК)

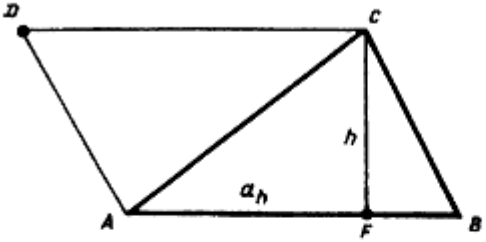
	Дано	Найти	Решение
	1. $a, \angle B, \angle C$	$\angle A, b, c$	$\angle A = 180° - (\angle B + \angle C)$ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ $b = \frac{a \sin B}{\sin A}; c = \frac{a \sin C}{\sin A}$
	2. $b, c, \angle A$	$a, \angle B, \angle C$	$a = \sqrt{c^2 + b^2 - 2bc\cos A}$ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ $\sin B = \frac{b \sin A}{a}; \sin C = \frac{c \sin A}{a}$ $\angle B$ и $\angle C$ — по таблицам

	3. a, b, c	$\angle A, \angle B, \angle C$	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$; $\angle A$ — по таблицам $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ $\sin B = \frac{b\sin A}{a}$; $\angle B$ — по таблицам $\sin C = \frac{c\sin A}{a}$ или $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B)$
	4. $a, c, \angle A$	$b, \angle B, \angle C$	$\frac{c}{\sin A} = \frac{a}{\sin A}$; $\sin C = \frac{c\sin A}{a}$ $\angle B = 180° - (\angle A + \angle C)$ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$; $b = \frac{a\sin B}{\sin A}$

СВОЙСТВА СРЕДНЕЙ ЛИНИИ ТРЕУГОЛЬНИКА И СРЕДНЕЙ ЛИНИИ ТРАПЕЦИИ

Теорема	Доказательство
$AF = FB$, $BE = EC$  $FE = \frac{1}{2}AC$, $FE \parallel AC$	 1) Прямая, проходящая через середину E и параллельная AC — FE (по теореме Фалеса). Итак, $FE \parallel AC$ 2) EE_1 — средняя линия ΔBCA, $AFEE_1$ — параллелограмм, $AE_1 = E_1C$ (по теореме Фалеса), $FE = \frac{1}{2}AC$
$AF = FB$, $CE = ED$.  $FE = \frac{BC + AD}{2}$, $FE \parallel BC \parallel AD$	 $BE \cap AD = \{G\}$, $\Delta BCE = \Delta CDE$ $BE = EG \rightarrow EF$ — средняя линия ΔABG. $BC = DG \rightarrow$ $\rightarrow FE \parallel AD$ (значит, $FE \parallel BC$) $FE = \frac{AD + DG}{2} = \frac{BC + AD}{2}$ Итак, $FE = \frac{BC + AD}{2}$ и $FE \parallel BC \parallel AD$

ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА

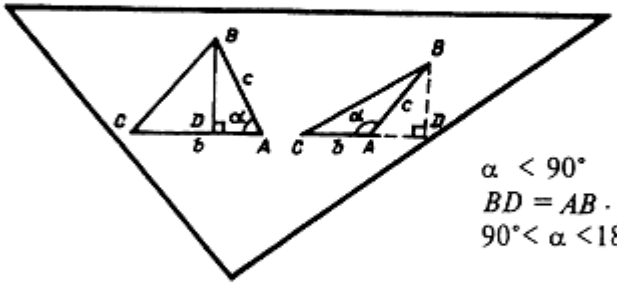


$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} a_h \cdot h$$

$$S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABC}$$

$$S_{ABCD} = a_h \cdot h$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a_h \cdot h$$



$\alpha < 90°$

$BD = AB \cdot \sin \alpha$

$90° < \alpha < 180°$

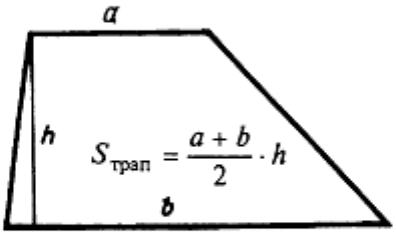
$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} bc \sin \angle b,c$$

$$BD = AB \cdot \sin\ (180° - \alpha) = AB \cdot \sin \alpha$$

$$h = c \cdot \sin \angle b,c \quad S_{\Delta} = \frac{1}{2} b_h \cdot h = S_{\Delta} = \frac{1}{2} bc \sin \angle b,c$$

ПЛОЩАДЬ ТРАПЕЦИИ

ТЕОРЕМА:



$$S_{\text{трап}} = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

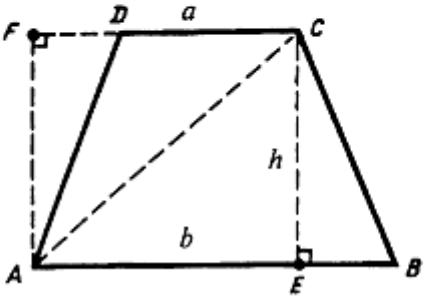
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

$S_{ABCD} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ADC}$, поскольку $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CE$

$S_{\Delta ADC} = \frac{1}{2} DC \cdot AF$, то $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB \cdot \underbrace{CE + DC \cdot AF}_{h}) =$

$= \frac{1}{2} h (AB + DC)$

$$S_{ABCD} = \frac{a+b}{2} h$$

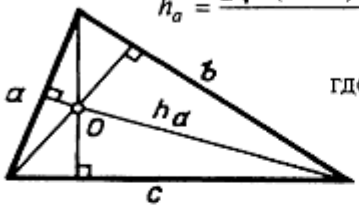


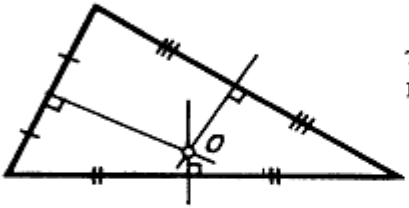
ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

т. O — ортоцентр; $h_a = \sqrt{c^2 - (\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a})^2}$

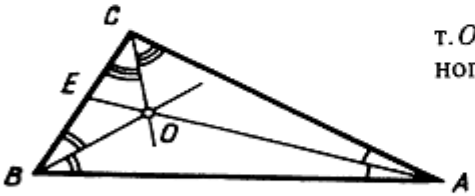
$$h_a = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a},$$

где $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$





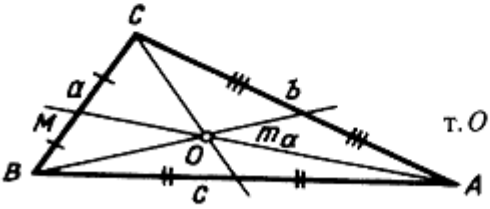
т. O — центр описанного круга



т. O — центр вписанного круга

$$\frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{S_{\text{треуг.}ABE}}{S_{\text{треуг.}ACE}} = \frac{AB}{AC}$$



т. O — центр тяжести

$$\frac{AO}{OM} = 2 : 1$$

$$S_{\Delta ABM} = S_{\Delta ACM}$$

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$