УРАВНЕНИЯ

Уравнение

Определение: равенство, содержащее переменную

Корни: значения переменных, обращающие уравнение в верное равенство

Равносильные: имеющие одинаковые корни

Степень: наивысшая степень переменной, входящей в уравнение

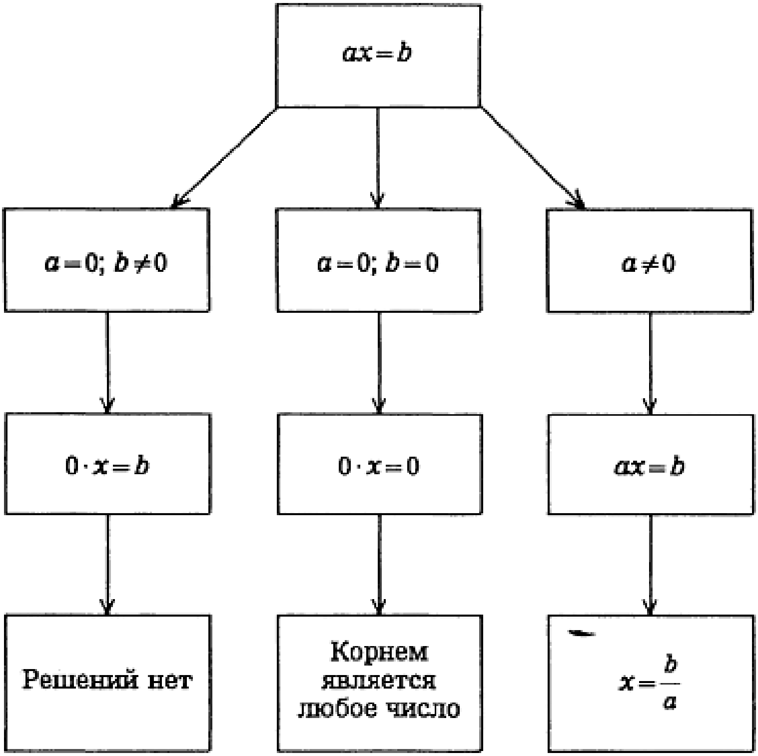
Свойства:
1. Можно переносить слагаемые из одной части в другую с противоположным знаком.
2. Можно умножать (делить) обе части на одно и то же число, не равное 0

Уравнения с одной переменной

Степень	Название уравнения	Общий вид
1	Линейное	$ax=b$
2	Квадратное	$ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$
3	Кубическое	$ax^3+bx^2+cx+d=0,\ a\neq 0$

x – переменная; a, b, c, d – некоторые числа.

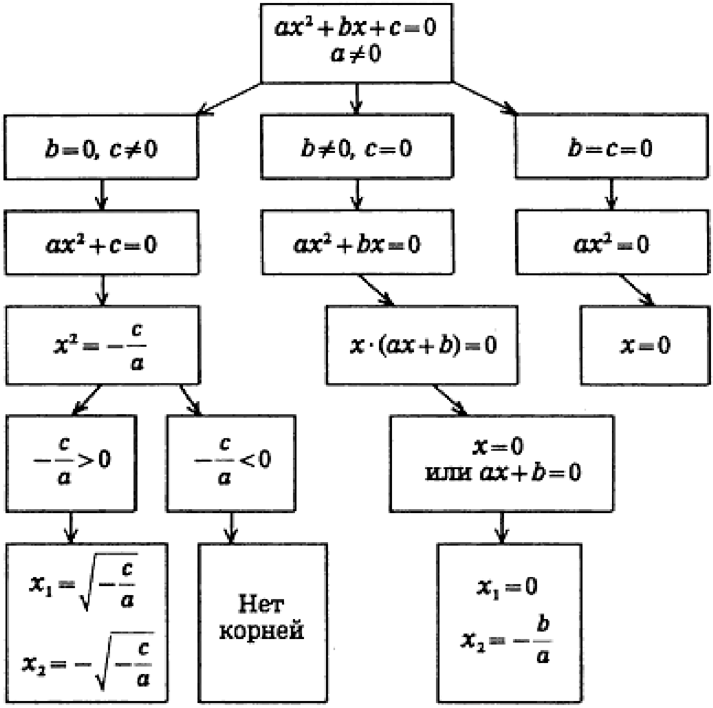
Решение линейного уравнения



Пример 1	$0\cdot x=5$	Ответ: решений нет
Пример 2	$0\cdot x=0$	Ответ: любое число
Пример 3	$2x=1$ $x=\frac{1}{2}$	Ответ: $\frac{1}{2}$

Решение квадратного уравнения ax^2+bx+c

1. Решение неполного квадратного уравнения



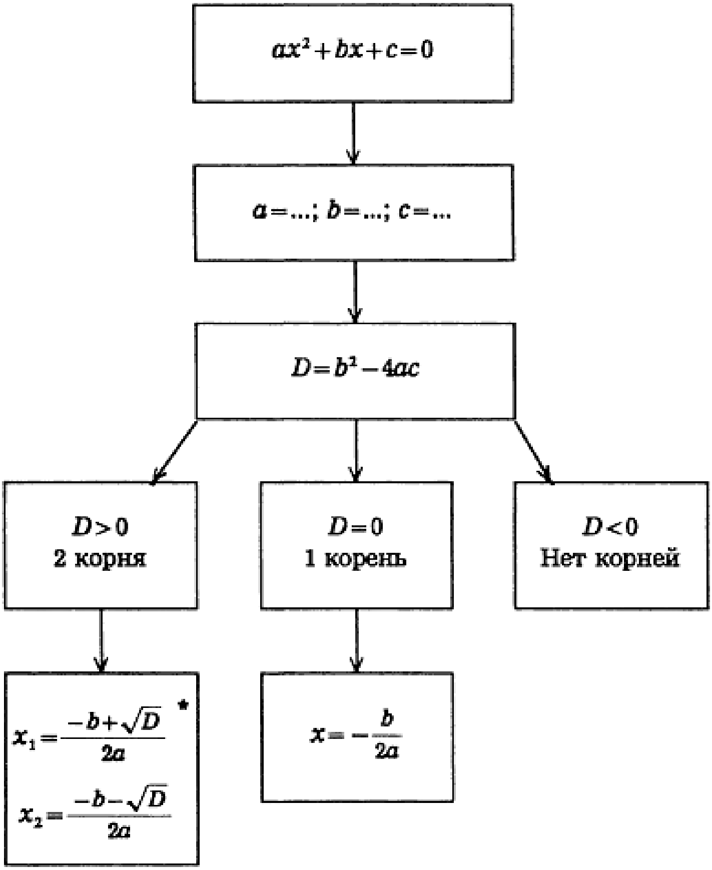
Пример 1. а) $5x^2+10=0$, $5x^2=-10$, $x^2=-2$,
$-2<0$, значит, корней нет.
Ответ: корней нет.

б) $5x^2-10=0$, $5x^2=10$, $x^2=2$,
$2>0$, значит, $x_1=\sqrt{2}$, $x_2=-\sqrt{2}$.
Ответ: $\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$.

Пример 2. $2x^2+6x=0$, $2x(x+3)=0$,
$2x=0$ или $x+3=0$, $x_1=0$, $x_2=-3$.
Ответ: 0; -3.

Пример 3. $3x^2+5=5$, $3x^2=5-5$, $3x^2=0$, $x^2=0$, $x=0$.
Ответ: 0.

2. Решение квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ по формуле



* Запись корней x_1 и x_2 в случае, когда $D>0$, объединяют и записывают так: $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$.

Пример 1	Решить уравнение: $2x^2-3x+1=0$, $a=2$; $b=-3$; $c=1$. $D=b^2-4ac=$ $=(-3)^2-4\cdot2\cdot1=1$. $D>0$, значит, уравнение имеет 2 корня. $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=$ $=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2\cdot2}=\frac{3\pm1}{4}$; $x_1=\frac{3-1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$; $x_2=\frac{3+1}{4}=1$. Ответ: $\frac{1}{2}$; 1.
Пример 2	Решить уравнение: $9x^2+6x+1=0$, $a=9$; $b=6$; $c=1$. $D=b^2-4ac=$ $=6^2-4\cdot9\cdot1=36-36=0$. $D=0$, значит, уравнение имеет 1 корень. $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{6}{2\cdot9}=$ $=-\frac{6}{18}=-\frac{1}{3}$. Ответ: $-\frac{1}{3}$.
Пример 3	Решить уравнение: $2x^2-3x+4=0$, $a=2$; $b=-3$; $c=4$. $D=b^2-4ac=$ $=(-3)^2-4\cdot2\cdot4=$ $=9-32=-23$. $D<0$, значит, уравнение корней не имеет. Ответ: нет корней.

3. Решение квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ по формуле при четном b

$ax^2+bx+c=0$
b – четное число

↓

$a=\dots;\ k=\dfrac{b}{2}=\dots;\ c=\dots$

↓

$\dfrac{D}{4}=k^2-ac$

$\dfrac{D}{4}>0$ 2 корня	$\dfrac{D}{4}=0$ 1 корень	$\dfrac{D}{4}<0$ Нет корней
$x_1=\dfrac{-k-\sqrt{\dfrac{D}{4}}}{a}$ $x_2=\dfrac{-k+\sqrt{\dfrac{D}{4}}}{a}$	$x=-\dfrac{k}{a}$	

Пример. Решить уравнение: $3x^2-14x-80=0$,

$a=3;\ k=\dfrac{-14}{2}=-7;\ c=-80.$

$\dfrac{D}{4}=(-7)^2-3\cdot(-80)=49+240=289.$

$\dfrac{D}{4}>0$, значит, уравнение имеет 2 корня.

$$x_1=\frac{-k-\sqrt{\frac{D}{4}}}{a}=\frac{7-17}{3}=-\frac{10}{3}=-3\frac{1}{3};$$

$$x_2=\frac{-k+\sqrt{\frac{D}{4}}}{a}=\frac{7+17}{3}=\frac{24}{3}=8.$$

Ответ: $-3\frac{1}{3}$; 8.

4. а) Решение квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ по теореме Виета (и обратной к ней)

$$\boxed{ax^2+bx+c=0} \longrightarrow \boxed{\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases} \quad x_1,\ x_2 - \text{корни}}$$

б) Решение приведенного квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ по теореме Виета (и обратной к ней)

$$\boxed{x^2+px+q=0} \longrightarrow \boxed{\begin{cases} x_1+x_2=-p \\ x_1\cdot x_2=q \end{cases} \quad x_1,\ x_2 - \text{корни}}$$

Пример. Решить уравнение: $x^2+5x-6=0$,

$$\begin{cases} x_1+x_2=-5, \\ x_1\cdot x_2=-6, \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_1=-6, \\ x_2=1. \end{matrix}$$

Ответ: -6; 1.

Примеры решений уравнений высших степеней, разрешаемых с помощью квадратного уравнения

Пример 1.

$$ax^4+bx^3+cx^2=0$$

↓

$$x^2\cdot(ax^2+bx+c)=0$$

↓

$ax^2+bx+c=0$ или $x^2=0$

↙ ↘

Решается по формуле (см. выше) | $x=0$

Пример 2.

$$x^3-a^3=0$$

↓

$$(x-a)(x^2+ax+a^2)=0$$

↓

$x^2+ax+a^2=0$ или $x-a=0$

↙ ↘

Решается по формуле (см. выше) | $x=a$

Пример 3. Биквадратное уравнение