НЕРАВЕНСТВА

Неравенство

Решение: значение переменной, обращающее неравенство в верное

Решить: найти все решения или доказать, что их нет

Равносильные: имеющие одинаковые решения

Можно переносить слагаемые из одной части в другую с противоположным знаком

Можно умножать (делить) обе части на одно и то же положительное число

Можно умножать (делить) обе части на одно и то же отрицательное число, поменяв при этом знак неравенства

Название неравенства	Общий вид
Линейное	1) $ax>b$ 2) $ax\geqslant b$ 3) $ax<b$ 4) $ax\leqslant b$
Квадратичное	1) $ax^2+bx+c>0$ 2) $ax^2+bx+c\geqslant 0$ 3) $ax^2+bx+c<0$ 4) $ax^2+bx+c\leqslant 0$

Свойства числовых неравенств

№	Условие	Заключение
1	$a>b$	$b<a$
2	$a>b$ и $b>c$	$a>c$
3	$a>b$, c – любое число	$a+c>b+c$
4	$a>b$ и $c>0$	$ac>bc$
5	$a>b$ и $c<0$	$ac<bc$
6	$a>b$ и $c>d$	$a+c>b+d$
7	$a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$, $a>b$ и $c>d$	$ac>bd$
8	$a>b>0$, n – натуральное число	$a^n>b^n$
9	$a>0$, $b>0$, $a>b$	$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

Приближенные вычисления

НГ – нижняя граница приближенного значения

ВГ – верхняя граница приближенного значения

НГ $(x+y)=$ НГ$x+$НГy

ВГ $(x+y)=$ ВГ$x+$ВГy

НГ $(x-y)=$ НГ$x-$ВГy

ВГ $(x-y)=$ ВГ$x-$НГy

НГ $(x\cdot y)=$ НГ$x\cdot$НГy

ВГ $(x\cdot y)=$ ВГ$x\cdot$ВГy

$$\text{НГ}\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{\text{НГ}x}{\text{ВГ}y}$$

$$\text{ВГ}\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{\text{ВГ}x}{\text{НГ}y}$$

То есть если $a<x<b$ и $c<y<d$, то:

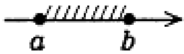
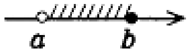
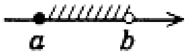
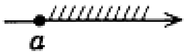
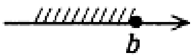
$a+c$	$<$	$x+y$	$<$	$b+d$
$a-d$	$<$	$x-y$	$<$	$b-c$
$a\cdot c$	$<$	$x\cdot y$	$<$	$b\cdot d$
$\frac{a}{d}$	$<$	$\frac{x}{y}$	$<$	$\frac{b}{c}$

Абсолютная и относительная погрешности

Δ – абсолютная погрешность, δ – относительная погрешность

Алгебраическое выражение	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
Суммы $a+b$	$\Delta(a+b)=\Delta a+\Delta b$	$\delta(a+b)\leqslant\delta(a)$, где $\delta(a)\geqslant\delta(b)$
Разности $a-b$	$\Delta(a-b)=\Delta a+\Delta b$	–
Произведения $a\cdot b$	$\Delta(a\cdot b)=a\cdot\Delta b+b\cdot\Delta a$	$\delta(ab)=\delta(a)+\delta(b)$
Частного $\frac{a}{b}$	$\Delta\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{b\cdot\Delta a+a\cdot\Delta b}{b^2}$	$\delta\left(\frac{a}{b}\right)=\delta(a)+\delta(b)$
Степени a^n	$\Delta(a^n)=n\cdot a^{n-1}\cdot\Delta a$	$\delta(a^n)=n\cdot\delta(a)$
Корня $\sqrt[n]{a}$	$\Delta(\sqrt[n]{a})=\frac{\Delta a}{n\cdot\sqrt[n]{a^{n-1}}}$	$\delta(\sqrt[n]{a})=\frac{\delta(a)}{n}$

Числовые промежутки

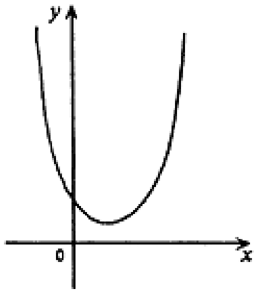
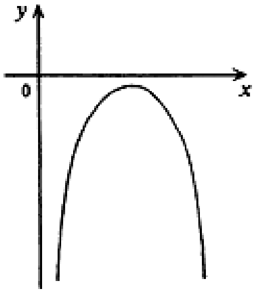
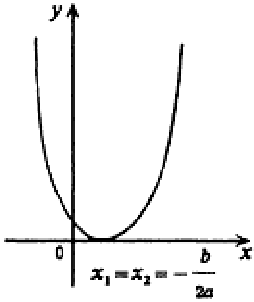
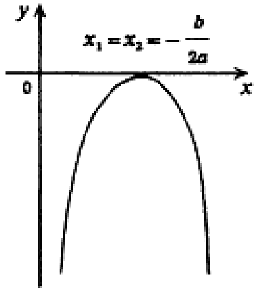
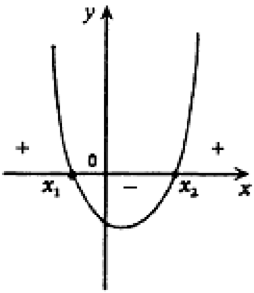
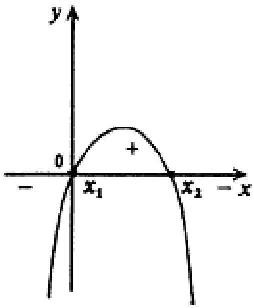
Вид промежутка	Геометрическое изображение	Обозначение	Запись с помощью неравенств
Интервал		$(a;\ b)$	$a<x<b$
Отрезок		$[a;\ b]$	$a\leqslant x\leqslant b$
Полуинтервал		$(a;\ b]$	$a<x\leqslant b$
Полуинтервал		$[a;\ b)$	$a\leqslant x<b$
Луч		$[a;\ +\infty)$	$x\geqslant a$
Луч		$(-\infty;\ b]$	$x\leqslant b$
Открытый луч		$(a;\ +\infty)$	$x>a$
Открытый луч		$(-\infty;\ b)$	$x<b$

Решение линейного неравенства

Вид неравенства	a	Решение	Ответ
$ax+b>0$	$a>0$	$x>-\frac{b}{a}$	$\left(-\frac{b}{a};\ \infty\right)$
$ax+b>0$	$a<0$	$x<-\frac{b}{a}$	$\left(-\infty;\ -\frac{b}{a}\right)$
$ax+b\geqslant 0$	$a>0$	$x\geqslant -\frac{b}{a}$	$\left[-\frac{b}{a};\ \infty\right)$
$ax+b\geqslant 0$	$a<0$	$x\leqslant -\frac{b}{a}$	$\left(-\infty;\ -\frac{b}{a}\right]$
$ax+b<0$	$a>0$	$x<-\frac{b}{a}$	$\left(-\infty;\ -\frac{b}{a}\right)$
$ax+b<0$	$a<0$	$x>-\frac{b}{a}$	$\left(-\frac{b}{a};\ \infty\right)$
$ax+b\leqslant 0$	$a>0$	$x\leqslant -\frac{b}{a}$	$\left(-\infty;\ -\frac{b}{a}\right]$
$ax+b\leqslant 0$	$a<0$	$x\geqslant -\frac{b}{a}$	$\left[-\frac{b}{a};\ \infty\right)$

Квадратичное неравенство вида $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c<0$ и т. д.

Графическое изображение

Дискриминант	$a>0$	$a<0$
$D<0$		
$D=0$		
$D>0$		

Решение квадратичного неравенства при $D<0$

Неравенство	D	a	Решение
$ax^2+bx+c>0$	$D<0$	$a>0$	$(-\infty;\ \infty)$
$ax^2+bx+c\geqslant 0$	$D<0$	$a>0$	$(-\infty;\ \infty)$
$ax^2+bx+c<0$	$D<0$	$a>0$	Нет решений
$ax^2+bx+c\leqslant 0$	$D<0$	$a>0$	Нет решений
$ax^2+bx+c>0$	$D<0$	$a<0$	Нет решений
$ax^2+bx+c\geqslant 0$	$D<0$	$a<0$	Нет решений
$ax^2+bx+c<0$	$D<0$	$a<0$	$(-\infty;\ \infty)$
$ax^2+bx+c\leqslant 0$	$D<0$	$a<0$	$(-\infty;\ \infty)$

Решение квадратичного неравенства при $D=0$

$x_1 = -\frac{b}{2a}$; x_1 – корень квадратного трехчлена

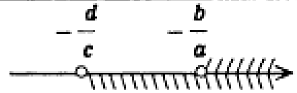
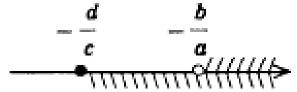
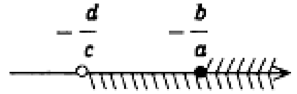
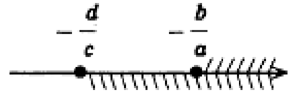
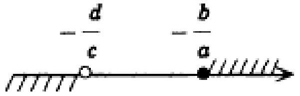
ax^2+bx+c

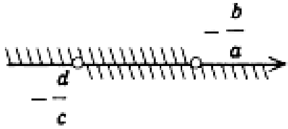
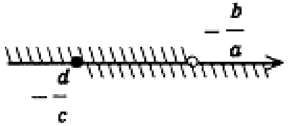
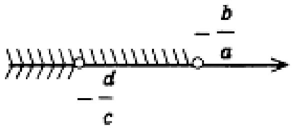
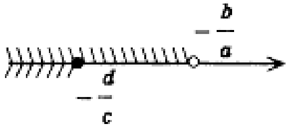
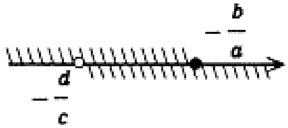
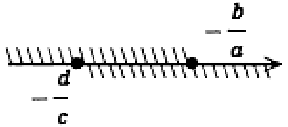
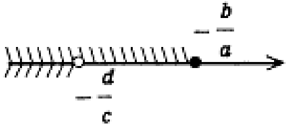
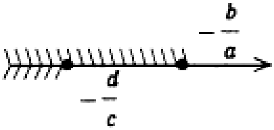
Неравенство	D	a	Решение
$ax^2+bx+c>0$	$D=0$	$a>0$	$\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)\cup\left(-\frac{b}{2a}; \infty\right)$
$ax^2+bx+c\geqslant 0$	$D=0$	$a>0$	$(-\infty; \infty)$
$ax^2+bx+c<0$	$D=0$	$a>0$	Нет решений
$ax^2+bx+c\leqslant 0$	$D=0$	$a>0$	$-\frac{b}{2a}$
$ax^2+bx+c>0$	$D=0$	$a<0$	Нет решений
$ax^2+bx+c\geqslant 0$	$D=0$	$a<0$	$-\frac{b}{2a}$
$ax^2+bx+c<0$	$D=0$	$a<0$	$\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)\cup\left(-\frac{b}{2a}; \infty\right)$
$ax^2+bx+c\leqslant 0$	$D=0$	$a<0$	$(-\infty; \infty)$

Решение квадратичного неравенства при $D>0$
x_1, x_2 — корни квадратного трехчлена ax^2+bx+c; $x_2>x_1$

Неравенство	D	a	Решение
$ax^2+bx+c>0$	$D>0$	$a>0$	$(-\infty;\ x_1)\bigcup(x_2;\ \infty)$
$ax^2+bx+c\geqslant0$	$D>0$	$a>0$	$(-\infty;\ x_1]\bigcup[x_2;\ \infty)$
$ax^2+bx+c<0$	$D>0$	$a>0$	$(x_1;\ x_2)$
$ax^2+bx+c\leqslant0$	$D>0$	$a>0$	$[x_1;\ x_2]$
$ax^2+bx+c>0$	$D>0$	$a<0$	$(x_1;\ x_2)$
$ax^2+bx+c\geqslant0$	$D>0$	$a<0$	$[x_1;\ x_2]$
$ax^2+bx+c<0$	$D>0$	$a<0$	$(-\infty;\ x_1)\bigcup(x_2;\ \infty)$
$ax^2+bx+c\leqslant0$	$D>0$	$a<0$	$(-\infty;\ x_1]\bigcup[x_2;\ \infty)$

Решение системы линейных неравенств с одной переменной вида $\begin{cases} ax+b>0 \\ cx+d>0 \end{cases}$, где $-\frac{b}{a} > -\frac{d}{c}$ $(a>0;\ c>0)$

Система неравенств	Изображение на координатной прямой	Решение
$\begin{cases} ax+b>0 \\ cx+d>0 \end{cases}$		$\left(-\frac{b}{a};\ \infty\right)$
$\begin{cases} ax+b>0 \\ cx+d\geqslant 0 \end{cases}$		$\left(-\frac{b}{a};\ \infty\right)$
$\begin{cases} ax+b>0 \\ cx+d<0 \end{cases}$		Нет решений
$\begin{cases} ax+b>0 \\ cx+d\leqslant 0 \end{cases}$		Нет решений
$\begin{cases} ax+b\geqslant 0 \\ cx+d>0 \end{cases}$		$\left[-\frac{b}{a};\ \infty\right)$
$\begin{cases} ax+b\geqslant 0 \\ cx+d\geqslant 0 \end{cases}$		$\left[-\frac{b}{a};\ \infty\right)$
$\begin{cases} ax+b\geqslant 0 \\ cx+d<0 \end{cases}$		Нет решений
$\begin{cases} ax+b\geqslant 0 \\ cx+d\leqslant 0 \end{cases}$		Нет решений

Система неравенств	Изображение на координатной прямой	Решение
$\begin{cases} ax+b<0 \\ cx+d>0 \end{cases}$		$\left(-\frac{d}{c};\ -\frac{b}{a}\right)$
$\begin{cases} ax+b<0 \\ cx+d\geqslant 0 \end{cases}$		$\left[-\frac{d}{c};\ -\frac{b}{a}\right)$
$\begin{cases} ax+b<0 \\ cx+d<0 \end{cases}$		$\left(-\infty;\ -\frac{d}{c}\right)$
$\begin{cases} ax+b<0 \\ cx+d\leqslant 0 \end{cases}$		$\left(-\infty;\ -\frac{d}{c}\right]$
$\begin{cases} ax+b\leqslant 0 \\ cx+d>0 \end{cases}$		$\left(-\frac{d}{c};\ -\frac{b}{a}\right]$
$\begin{cases} ax+b\leqslant 0 \\ cx+d\geqslant 0 \end{cases}$		$\left[-\frac{d}{c};\ -\frac{b}{a}\right]$
$\begin{cases} ax+b\leqslant 0 \\ cx+d<0 \end{cases}$		$\left(-\infty;\ -\frac{d}{c}\right)$
$\begin{cases} ax+b\leqslant 0 \\ cx+d\leqslant 0 \end{cases}$		$\left(-\infty;\ -\frac{d}{c}\right]$

Неравенства с модулями

$|f(x)|>a$ (1)
$|f(x)|\geqslant a$ (2)
$|f(x)|<a$ (3)
$|f(x)|\leqslant a$ (4)

I способ. a рассматривается как расстояние на координатной прямой

II способ. Если $a>0$, то $|f(x)|$ и a возводим в квадрат. Если $a<0$, то (1) и (2) верны всегда, а (3) и (4) не имеют решений

III способ. По определению модуля:
$$|f(x)|=\begin{cases} f(x), \text{ если } f(x)\geqslant 0 \\ -f(x), \text{ если } f(x)<0 \end{cases}$$

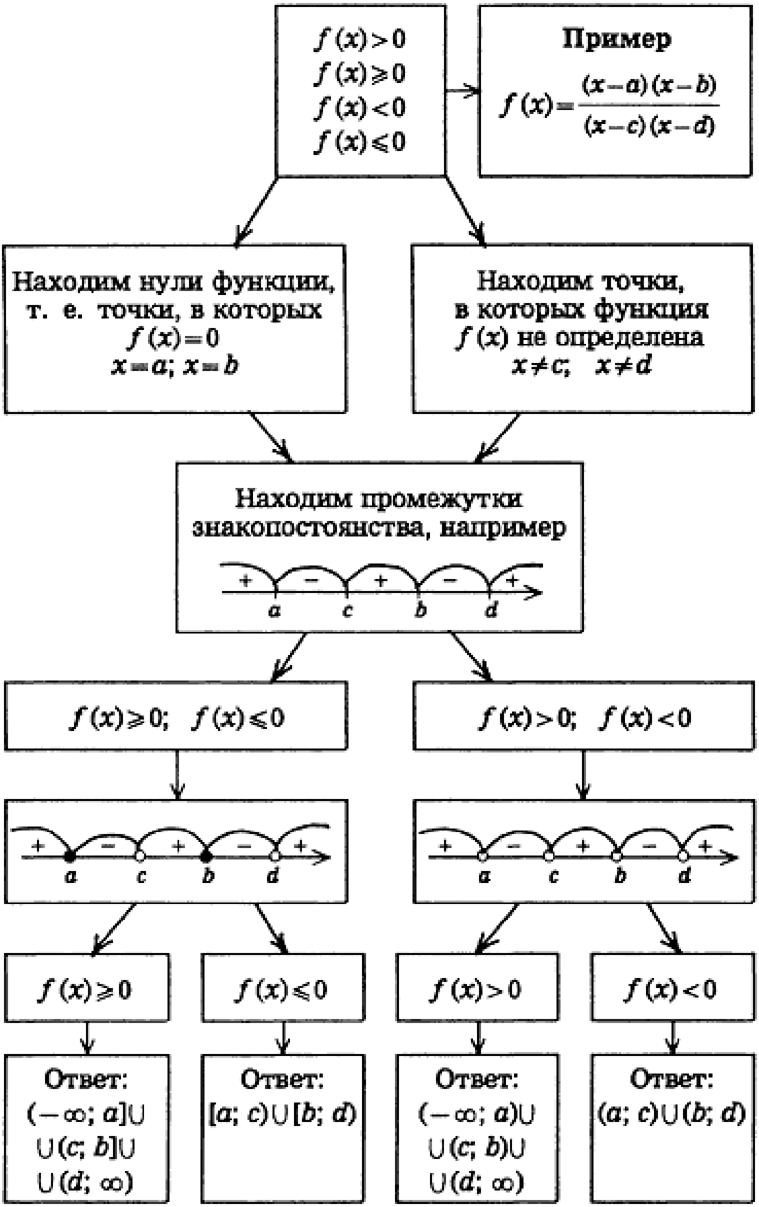
Пример. $|x-1|<2$
$|x-1|$ — расстояние на координатной прямой между точками x и 1.

Ответ: $(-1; 3)$

Пример. $|x-1|<2$
$$|x-1|=\begin{cases} x-1, \text{ если } x-1\geqslant 0 \\ -(x-1), \text{ если } x-1<0, \end{cases}$$
т. е.
$$\begin{cases} x-1\geqslant 0 \\ x-1<2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x-1<0 \\ -(x-1)<2 \end{cases}$$
$1\leqslant x<3$ $\qquad$ $-1<x<1$
(см. решение систем неравенств).
Объединяем эти решения.
Ответ: $(-1, 3)$

Пример. $|x-1|<2$
$(x-1)^2<4,$
$x^2-2x-3<0$, т. е.
$-1<x<3$ (см. решение квадратичного неравенства).
Ответ: $(-1; 3)$

Решение неравенств методом интервалов



Пример решения неравенства методом интервалов

$$\frac{(x-5)\cdot(x+4)}{x\cdot(x-2)} \leqslant 0$$

Рассмотрим $f(x)$:

$$f(x)=\frac{(x-5)\cdot(x+4)}{x\cdot(x-2)}$$

$f(x)=0$ при

$(x-5)\cdot(x+4)=0$

$x-5=0$ или $x+4=0$

$x=5$ или $x=-4$

$f(x)$ не определена при

$x\cdot(x-2)=0$, т. е.

$x\neq 0$ и $x\neq 2$

Отметим промежутки знакопостоянства:

$f(-10)>0$

$f(-2)<0$

$f(1)>0$

$f(3)<0$

$f(10)>0$

Надо решить неравенство

$f(x)\leqslant 0$

Ответ:

$[-4;\,0)\cup(2;\,5]$

Решение иррациональных неравенств

$\sqrt{f(x)} < g(x)$; $\sqrt{f(x)} > g(x)$

$\sqrt{f(x)} < g(x)$

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ g(x) > 0 \\ \sqrt{f(x)} < g(x) \end{cases}$$

$$\begin{matrix} f(x) \geqslant 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < (g(x))^2 \end{matrix}$$

$\sqrt{f(x)} > g(x)$

$$\begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geqslant 0 \\ \sqrt{f(x)} > g(x) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} g(x) \geqslant 0 \\ f(x) \geqslant 0 \\ \sqrt{f(x)} > g(x) \end{cases}$$

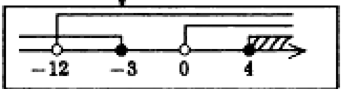
$$\begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} g(x) \geqslant 0 \\ f(x) \geqslant 0 \\ f(x) > (g(x))^2 \end{cases}$$

Пример 1

$\sqrt{x^2 - x - 12} < x$

$$\begin{cases} x^2 - x - 12 \geqslant 0 \\ x > 0 \\ x^2 - x - 12 < x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty;\ -3] \cup [4;\ \infty) \\ x > 0 \\ x > -12 \end{cases}$$



Ответ: $[4;\ \infty)$

Пример 2

$\sqrt{x^2 - 3x + 2} > x + 3$

$$\begin{cases} x + 3 < 0 \\ x^2 - 3x + 2 \geqslant 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 3 \geqslant 0 \\ x^2 - 3x + 2 \geqslant 0 \\ x^2 - 3x + 2 \geqslant (x+3)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -3 \\ x \in (-\infty;\ 1] \cup [2;\ \infty) \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geqslant -3 \\ x \in (-\infty;\ 1] \cup [2;\ \infty) \\ x < -\frac{7}{9} \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\infty;\ -\frac{7}{9}\right)$

Доказательство неравенств

I способ. Доказательство по определению бо́льшего числа

II способ. Синтетический метод доказательства

III способ. Доказательство методом от противного

$a > b \Leftrightarrow a - b > 0$, поэтому, чтобы доказать неравенство $f(x) > g(x)$, надо показать, что $f(x) - g(x) > 0$

Требуемое неравенство доказывается путем преобразований со ссылкой на некоторые известные (опорные) неравенства

$f(x) > g(x)$ Предположим, что $f(x) \leqslant g(x)$, и приходим к противоречию. Вывод: $f(x) > g(x)$

Опорные неравенства:

1) $|a+b| \leqslant |a| + |b|$

2) $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$, где $a > 0$

3) $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$ $(a > 0,\ b > 0)$

4) $1 : \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{2ab}{a+b}$

5) $-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$

6) $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$

Решение примеров на доказательство неравенств

Способ	Неравенство	Доказательство
I	$(a-3)\cdot(a-5)<(a-4)^2$	Рассмотрим разность $(a-3)\cdot(a-5)-(a-4)^2$. $(a-3)\cdot(a-5)-(a-4)^2=a^2-5a-3a+15-a^2+8a-16=-1$. $(a-3)\cdot(a-5)-(a-4)^2=-1<0$ для всех a, значит, $(a-3)\cdot(a-5)<(a-4)^2$.
II	$\frac{a+b+c+d}{4}\geqslant\sqrt[4]{abcd}$, где $a\geqslant 0$; $b\geqslant 0$; $c\geqslant 0$; $d\geqslant 0$	$\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}$, поэтому $\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2}\geqslant\sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}}$, а также $\sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}}\geqslant\sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}}$, но $\sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}}=\sqrt[4]{abcd}$. Таким образом, $\frac{a+b+c+d}{4}\geqslant\sqrt[4]{abcd}$.
III	$\sqrt{(a+c)(b+d)}\geqslant$ $\geqslant\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$, где $a\geqslant 0$; $b\geqslant 0$; $c\geqslant 0$; $d\geqslant 0$	Предположим, что $\sqrt{(a+c)(b+d)}<\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$. Возведем обе части в квадрат: $(a+c)(b+d)<ab+2\sqrt{abcd}+cd$, т. е. $ab+ad+bc+cd<ab+2\sqrt{abcd}+cd$, откуда $bc+da<2\sqrt{abcd}$, т. е. $\frac{bc+ad}{2}<\sqrt{abcd}$, что противоречит неравенству $\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}$. Вывод: $\sqrt{(a+c)(b+d)}\geqslant\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$.