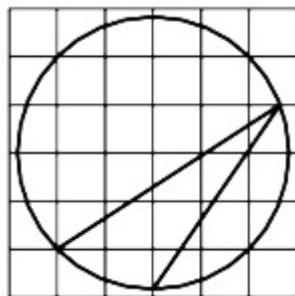


3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена окружность и вписанный в неё острый угол. Найдите градусную меру данного угла. Ответ дайте в градусах.



Ответ: _____.

4. Из множества натуральных чисел от 60 до 84 наудачу выбирают одно число. Какова вероятность того, что оно делится на 5?

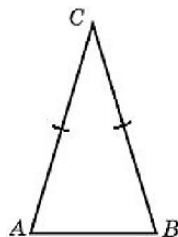
Ответ: _____.

5. Решите уравнение $8^{9-x} = 64^x$.

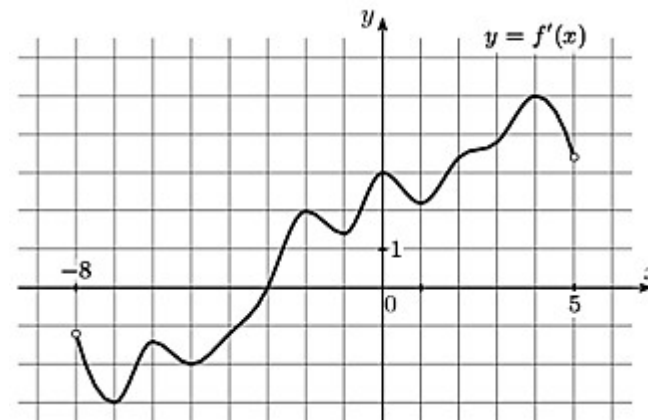
Ответ: _____.

6. Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника равен 30° , найдите боковую сторону этого треугольника, если его площадь равна 25.

Ответ: _____.

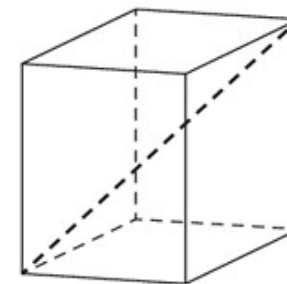


7. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8; 5)$. В какой точке отрезка $[0; 4]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



Ответ: _____.

8. Одна из граней прямоугольного параллелепипеда – квадрат. Диагональ параллелепипеда равна $2\sqrt{3}$ и образует с плоскостью этой грани угол 60° . Найдите объём параллелепипеда.



Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов №1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2.

9. Найдите $\log_a(a^3b^4)$, если $\log_a b = 5$.

Ответ: _____.

10. Двигаясь со скоростью $v = 5$ м/с, трактор тащит сани с силой $F = 32$ кН, направленной под острым углом α к горизонту. Мощность, развиваемая трактором, вычисляется по формуле $N = Fv \cos \alpha$. Найдите, при каком угле α (в градусах) эта мощность будет равна 80 кВт (кВт – это кН·м/с).

Ответ: _____.

11. Плиточник должен уложить 280 м² плитки. Если он будет укладывать на 9 м² в день больше, чем запланировал, то закончит работу на 7 дней раньше. Сколько квадратных метров плитки в день планирует укладывать плиточник?

Ответ: _____.

12. Найдите точку максимума функции $y = 9x^2 - x^3$.

Ответ: _____.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

13. а) Решите уравнение: $\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 2 \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos x = -\frac{1}{2}$.

б) Найдите все корни данного уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

14. Дана правильная четырехугольная пирамида $PABCD$. Через вершину основания, точку B , проведена плоскость α , перпендикулярная прямой PD и пересекающая боковые рёбра PA , PD и PC в точках K , L и M соответственно.

а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой AC .

б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью основания пирамиды, если известно, что $AB = 5\sqrt{2}$, $AP = 15$.

15. Решите неравенство:

$$2^{x+1} + \frac{9}{x} - \frac{3 \cdot 2^x}{x} \geq 6.$$

16. В прямоугольнике $ABCD$ длины сторон AB и AD относятся как 1 : 3. На отрезке AD как на диаметре построена окружность, которая пересекает диагонали AC и BD в точках N и M соответственно.

а) Докажите, что прямые MN и AD параллельны.

б) Найдите площадь четырехугольника $AMND$, если $AD = 6$.

17. Борис Петрович пользуется банковским вкладом на следующих условиях: ежегодно 16 марта банк начисляет 10% на остаток и добавляет их к сумме вклада, 17 марта Борис Петрович может пополнить вклад на любую сумму или снять любую сумму с вклада, вплоть до полного его закрытия.

1 марта 2020 года сумма вклада Бориса Петровича составляла 210 тыс. рублей. Борис Петрович планирует следующие операции по вкладу:

– 17 марта 2020 года и 17 марта 2021 года пополнить вклад на некоторую сумму x тыс. рублей;

– 17 марта 2022 года и 17 марта 2023 года снять с вклада по 242 тыс. рублей, причем последняя операция должна закрыть вклад.

Найдите x .

18. Найдите все такие значения параметра a , при каждом из которых уравнение $2x^3 + (3a + 2)x^2 + ax - 3a^2 = 0$ имеет ровно два различных действительных корня.

19. Юля любит все натуральные числа, которые делятся на 22, но не делятся на 6. А Гоше нравятся только те натуральные числа, цифры в десятичной записи которых не повторяются.

а) Существует ли число, которое нравится и Юле, и Гоше, и десятичная запись которого состоит из 2 цифр?

б) Существует ли число, которое нравится и Юле, и Гоше, и десятичная запись которого состоит из 5 цифр?

в) Из какого наибольшего количества цифр может состоять десятичная запись числа, которое нравится и Гоше, и Юле?

Ключи к заданиям 1 варианта профильного экзамена

№ задания	Ответ
1	24,3
2	12
3	22,5
4	0,2
5	3
6	10
7	0
8	4,5
9	23
10	60
11	15
12	6
13	а) $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{4}$.
14	б) $\arcsin \frac{1}{3}$.
15	$(0; \frac{3}{2}] \cup [\log_2 3; +\infty)$.
16	9,72.
17	79 тыс. рублей.
18	$a = -\frac{1}{4}$; $a = 0$; $a = \frac{10}{9}$.
19	а) нет, б) да, в) 9

Решения и критерии оценивания выполнения заданий 13—19

13. а) Решите уравнение: $\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 2 \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos x = -\frac{1}{2}$.

б) Найдите корни данного уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) $\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 2 \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos x = -\frac{1}{2}; \quad \sin^2 x - \sqrt{2} \cdot \cos x + \frac{1}{2} = 0;$

$$\cos^2 x + \sqrt{2} \cos x - \frac{3}{2} = 0; \quad \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}; \\ \cos x = -\frac{3\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

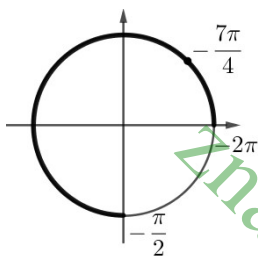
Из первого уравнения получаем $x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Второе уравнение не имеет решений, так как его правая часть меньше -1 .

б) Указанному промежутку принадлежит только одна

точка: $-\frac{7\pi}{4}$.

Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{7\pi}{4}$.



1/4

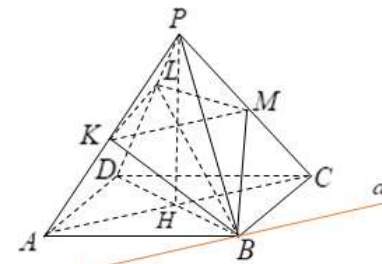
14. Дана правильная четырехугольная пирамида $PABCD$. Через вершину основания, точку B , проведена плоскость α , перпендикулярная прямой PD и пересекающая боковые рёбра PA, PD и PC в точках K, L и M соответственно.

а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой AC .

б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью основания пирамиды, если известно, что $AB = 5\sqrt{2}, AP = 15$.

Решение.

а) Пусть отрезок PH – высота пирамиды $PABCD$. Тогда, поскольку данная пирамида правильная, точка H – точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$. Прямая DH – проекция прямой DP на плоскость ABC и $DH \perp AC$, значит, и $DP \perp AC$. С другой стороны, $DP \perp (BKM)$, значит, $DP \perp KM$. Прямая PH – проекция прямой DP на плоскость APC , так как $DH \perp AC$ и $DH \perp PH$, следовательно, $PH \perp AC$ и $PH \perp KM$. Таким образом, $AC \parallel KM$ и, следовательно, $AC \parallel (BKM)$, что и требовалось доказать.



б) $AC \parallel KM$, откуда $KM \parallel (ABC)$. Значит, $(BKM) \cap (ABC) = a, a \parallel AC, B \in a$. Так как $BD \perp a$ и $BL \perp a$, то $\angle DBL$ – линейный угол искомого двугранного угла. Прямоугольные треугольники DPH и DBL имеют общий угол D , следовательно, они подобны, а, значит, $\angle DBL = \angle DPH = \varphi$.

Из прямоугольного треугольника DPH находим: $\sin \varphi = \frac{DH}{DP} = \frac{AB}{\sqrt{2}DP} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

Ответ: б) $\arcsin \frac{1}{3}$.

Критерии оценивания выполнения задания 13	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) и верно отображены корни в пункте б)	2
Верно выполнен пункт а) ИЛИ Полученный в пунктах а) и б) ответ неверен в результате ОДНОЙ допущенной арифметической ошибки (описки), не повлиявшей принципиально на ход решения и не упростившей задачу ИЛИ Пункт а) доведен до верных простейших уравнений, которые решены с ошибкой. При этом конкретные решения простейших уравнений, необходимые для пункта б), отображены верно, и, следовательно, ответ в пункте б) верен Замечание. Отбор корней может быть произведен любым способом: на единичной окружности, перебором значений k и т.д., но обязательно показан!	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Критерии оценивания выполнения задания 14	Баллы
Имеется верное доказательство в пункте а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	2
Имеется верное доказательство в пункте а) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) (даже в том случае, если учащийся опирался на невыполненное или выполненное неверно задание а) ИЛИ Имеется верное доказательство в пункте а) и обоснованно получен ответ в пункте б), неверный из-за арифметической ошибки (описки)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

2/4

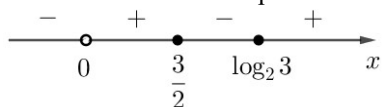
15. Решите неравенство: $2^{x+1} + \frac{9}{x} - \frac{3 \cdot 2^x}{x} \geq 6$.

Решение.

$$2^{x+1} + \frac{9}{x} - \frac{3 \cdot 2^x}{x} \geq 6; \quad 2 \cdot 2^x - 6 + \frac{9}{x} - \frac{3 \cdot 2^x}{x} \geq 0; \quad (2^x - 3) \left(2 - \frac{3}{x}\right) \geq 0; \quad \frac{(2^x - 3)(2x - 3)}{x} \geq 0.$$

Нули числителя: $x = \log_2 3$ и $x = \frac{3}{2}$. При этом $\log_2 3 > \log_2 2\sqrt{2} = \frac{3}{2}$.

Отметим на оси нули числителя и знаменателя и расставим знаки.



Таким образом, $x \in \left(0; \frac{3}{2}\right] \cup [\log_2 3; +\infty)$.

Ответ: $\left(0; \frac{3}{2}\right] \cup [\log_2 3; +\infty)$.

Критерии оценивания выполнения задания 15	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного потерей нулей числителя. Если в ответ включено значение $x = 0$, то следует выставить оценку «0 баллов» ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

16. В прямоугольнике $ABCD$ длины сторон AB и AD относятся как 1 : 3. На отрезке AD как на диаметре построена окружность, которая пересекает диагонали AC и BD в точках N и M соответственно.

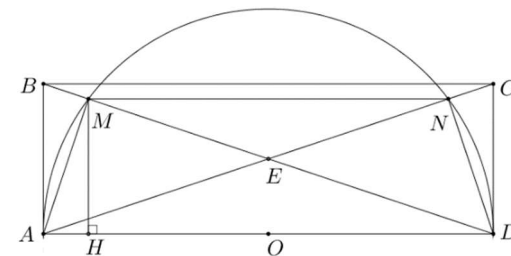
- Докажите, что прямые MN и AD параллельны.
- Найдите площадь четырехугольника $AMND$, если $AD = 6$.

Решение:

а) Точка E пересечения диагоналей прямоугольника находится внутри данного круга, так как расстояние от нее до центра окружности O , равно средней линии OE треугольника ABD , меньше радиуса окружности.

$$OE = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}AD = \frac{1}{6}AD < \frac{1}{2}AD.$$

Отрезки AE и DE , а, следовательно, и углы BDA и CAD равны, так как $ABCD$ – прямоугольник, углы AMD и AND равны по 90° , как вписанные, опирающиеся на диаметр. Тогда треугольники AMD и AND равны, так как имеют общую гипотенузу и равные острые углы. Тогда отрезки ME и NE равны, как разности равных отрезков.



Точки M и N делят отрезки BE и CE в равном отношении, значит, треугольники MNE и BCE подобны, так как имеют общий угол MEN и пропорциональные стороны. Тогда углы EMN и EBC равны, а, значит, прямые MN и BC , а, следовательно, и MN и AD параллельны.

б) Из треугольника ABD находим, что $AB = 2, BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2\sqrt{10}, BE = DE = \sqrt{10}$. По теореме о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике $\sqrt{BD \cdot DM} = AD$, значит, $DM = \frac{9}{5}\sqrt{10}$, а $ME = DM - DE = \frac{4}{5}\sqrt{10}$. Из подобия треугольников MEN и BEC (см. пункт а) находим:

$$MN = \frac{ME}{BE} \cdot BC = \frac{4\sqrt{10}}{5\sqrt{10}} \cdot 6 = 4,8.$$

Четырехугольник $AMND$ – трапеция (см. пункт а), ее высота MH может быть найдена из подобия треугольников DMH и DBA :

$$MH = \frac{DM}{BD} \cdot AB = \frac{9\sqrt{10}}{5 \cdot 2\sqrt{10}} \cdot 2 = 1,8.$$

По формуле площади трапеции получим:

$$S_{AMND} = \frac{6 + 4,8}{2} \cdot 1,8 = 9,72.$$

Ответ: 9,72.

Возможно другое решение (без использования пункта а), б) Из треугольника ADE :

$$\sin \angle AED = 2 \sin \angle AEO \cos \angle AEO = 2 \cdot \frac{AO}{AE} \cdot \frac{EO}{AE} = 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = 0,6.$$

$$S_{AMND} = \frac{1}{2} \cdot AN \cdot DM \cdot \sin \angle AED = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{5}\sqrt{10} \cdot \frac{9}{5}\sqrt{10} \cdot 0,6 = 9,72.$$

Ответ: 9,72.

3/4

Критерии оценивания выполнения задания 16	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Не доказано утверждения пункта а), но обоснованно получен верный ответ в пункте б) без использования утверждения пункта а) ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ в результате арифметической ошибки (описки) ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а), получен верный ответ в пункте б), но решение недостаточно обоснованно, либо обоснования содержат неточности.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при неверном доказательстве утверждения пункта а) и обоснованном решении пункта б) без использования утверждения пункта а) получен неверный ответ в результате арифметической ошибки (описки) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен или выполнен неверно ИЛИ получен верный ответ в пункте б), но решение недостаточно обоснованно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

17. Борис Петрович пользуется банковским вкладом на следующих условиях: ежегодно 16 марта банк начисляет 10% на остаток и добавляет их к сумме вклада, 17 марта Борис Петрович может пополнить вклад на любую сумму или снять любую сумму с вклада, вплоть до полного его закрытия.

1 марта 2020 года сумма вклада Бориса Петровича составляла 210 тыс. рублей. Борис Петрович планирует следующие операции по вкладу:

– 17 марта 2020 года и 17 марта 2021 года пополнить вклад на некоторую сумму x тыс. рублей;

– 17 марта 2022 года и 17 марта 2023 года снять с вклада по 242 тыс. рублей, причем последняя операция должна закрыть вклад.

Найдите x .

Решение.

После совершения описанных в условии задачи операций по вкладу (начисление процентов, пополнение вклада, снятие средств с вклада), остатки на вкладе 17 марта 2020, 2021, 2022 и 2023 годов будут последовательно составлять:

$$210 \cdot 1,1 + x; (210 \cdot 1,1 + x) \cdot 1,1 + x; ((210 \cdot 1,1 + x) \cdot 1,1 + x) \cdot 1,1 - 242; \\ ((210 \cdot 1,1 + x) \cdot 1,1 + x) \cdot 1,1 - 242.$$

Зная, что 17 марта 2023 года вклад планируется закрыть, составим уравнение:

$$(((210 \cdot 1,1 + x) \cdot 1,1 + x) \cdot 1,1 - 242) \cdot 1,1 - 242 = 0; \\ 210 \cdot (1,1)^4 + x \cdot (1,1)^3 + x \cdot (1,1)^2 - 242 \cdot 1,1 - 242 = 0;$$

Разделим правую и левую части на 121:

$$2,1 \cdot 1,21 + x \cdot 0,011 + x \cdot 0,01 - 2 \cdot 1,1 - 2 = 0; \\ 0,021x = 1,659; \\ x = 79.$$

Ответ: 79 тыс. рублей.

Критерии оценивания выполнения задания 17	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верный ответ получен, но недостаточно обоснован ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	2
Верно построена математическая модель, но дальнейшее решение неверно или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

18. Найдите все такие значения параметра a , при каждом из которых уравнение $2x^3 + (3a + 2)x^2 + ax - 3a^2 = 0$ имеет ровно два различных действительных корня.

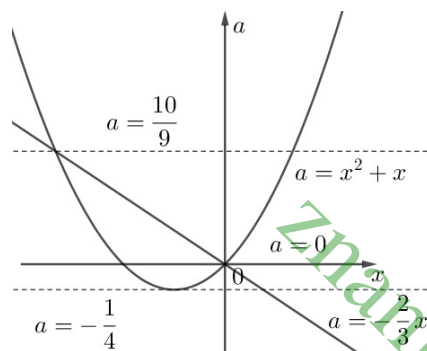
Решение.

Перепишав уравнение в виде $3a^2 - (3x^2 + x)a - (2x^3 + 2x^2) = 0$ и решив его относительно a , получаем $a = -\frac{2x}{3}$ или $a = x^2 + x$.

4/4

Первое из полученных уравнений при любом значении a имеет единственный корень $x = -\frac{3a}{2}$. Уравнение $x^2 + x - a = 0$ имеет два действительных корня, если его дискриминант $1 + 4a > 0$, т.е., при $a > -\frac{1}{4}$, ровно один корень при $a = -\frac{1}{4}$ и не имеет действительных корней при $a < -\frac{1}{4}$. Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два различных действительных корня в одном из двух случаев:

- 1) Число $x = -\frac{3a}{2}$ является одним из корней уравнения $x^2 + x - a = 0$, т.е.
 $\frac{9a^2}{4} - \frac{3a}{2} - a = 0$, откуда $a = 0$ или $a = \frac{10}{9}$.
- 2) Уравнение $x^2 + x - a = 0$ имеет ровно один корень, отличный от числа $-\frac{3a}{2}$. В этом случае $a = -\frac{1}{4}$.



Ответ: $a = -\frac{1}{4}$; $a = 0$; $a = \frac{10}{9}$.

Замечание. Задача может быть решена и графоаналитическим способом (см. рисунок)

Критерии оценивания выполнения задания 18	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Выполнены все шаги решения, получен ответ, но решение недостаточно обосновано ИЛИ Выполнены все шаги решения, получен неверный ответ из-за одной арифметической ошибки или описки	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного отсутствием одного из значений $a = -\frac{1}{4}$, $a = 0$ или $a = \frac{10}{9}$.	2
Решение задачи сведено к исследованию квадратного уравнения, получено значение $a = -\frac{1}{4}$ или одно из значений $a = 0$ или $a = \frac{10}{9}$. ИЛИ задача верно сведена к исследованию взаимного расположения графиков функций $a = -\frac{2x}{3}$ и $a = x^2 + x$.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

19. Юля любит все натуральные числа, которые делятся на 22, но не делятся на 6. А Гоше нравятся только те натуральные числа, цифры в десятичной записи которых не повторяются.

- а) Существует ли число, которое нравится и Юле, и Гоше, и десятичная запись которого состоит из 2 цифр?
- б) Существует ли число, которое нравится и Юле, и Гоше, и десятичная запись которого состоит из 5 цифр?
- в) Из какого наибольшего количества цифр может состоять десятичная запись числа, которое нравится и Гоше, и Юле?

Решение.

- а) Так как искомое число нравится Юле, то оно делится на 22, а значит, делится на 11. Раз оно двузначное, то оно состоит из одинаковых цифр, а значит, оно не может нравиться Гоше. Противоречие.
- б) Да, например, 14278.
- в) Так как цифры в искомом числе не повторяются, то их может быть не больше 10. Если их 10, то сумма цифр искомого числа равна 45, а значит, число делится на 3. С другой стороны, так как число нравится Юле, то оно делится на 22, а значит и на 2. Если число делится на 2 и на 3, то оно делится на 6, т.е., не нравится Юле – противоречие. Значит, в числе не более 9 цифр. Пример для 9 цифр: 980213564.

Ответ: а) нет, б) да, в) 9, пример: 980213564.

Критерии оценивания выполнения задания 19	Баллы
Верно получены все перечисленные результаты (см. критерий на 1 балл)	4
Верно получены три из перечисленных результатов (см. критерий на 1 балл)	3
Верно получены два из перечисленных результатов (см. критерий на 1 балл)	2
Верно получен один из перечисленных результатов: — обоснованное решение пункта а); — верный пример в пункте б); — доказательство, что запись данного числа не может состоять больше, чем из девяти цифр в пункте в); — верный пример числа, запись которого состоит из девяти цифр в пункте в).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4