ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА ПО НАДЗОРУ В СФЕРЕ ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ»

Методические материалы для председателей и членов предметных комиссий субъектов Российской Федерации по проверке выполнения заданий с развернутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ 2020 года

МАТЕМАТИКА

Москва
2020

Руководитель комиссии по разработке контрольных измерительных материалов, используемых при проведении государственной итоговой аттестации по образовательным программам основного общего и среднего общего образования по математике И.В. Ященко, в.н.с. Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный институт педагогических измерений».
Авторы: И.Р. Высоцкий, О.Н. Косухин, А.В. Семенов, А.С. Трепалин, М.А. Черняева.

Методические материалы для председателей и членов предметных комиссий субъектов Российской Федерации по проверке выполнения заданий с развернутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ 2020 г. по математике подготовлены в соответствии с Тематическим планом работ Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный институт педагогических измерений». Пособие предназначено для подготовки экспертов по оцениванию выполнения заданий с развернутым ответом, которые являются частью контрольных измерительных материалов (КИМ) для сдачи единого государственного экзамена (ЕГЭ) по математике профильного уровня.

В методических материалах характеризуются типы заданий с развернутым ответом, используемые в КИМ ЕГЭ по математике, и критерии оценки выполнения заданий с развернутым ответом, приводятся примеры оценивания выполнения заданий и даются комментарии, объясняющие выставленную оценку.

В пособии использованы работы участников ЕГЭ 2016–2019 гг.

Авторы будут благодарны за замечания и предложения по совершенствованию пособия.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Общие позиции и характер оценивания выполнения заданий в целом повторяют прошлогодние. Небольшие видоизменения и корректировки формулировок в содержании критериев оценивания для конкретного задания могут иметь место в тех случаях, когда необходимость подобного рода уточнений диктуется содержанием и структурой самого задания.

Более подробное описание заданий с развернутым ответом и критериев оценивания их выполнения представлены ниже, в начале каждого из параграфов 1–7.

Извлечения из Методических рекомендаций Рособрнадзора по формированию и организации работы предметных комиссий субъекта Российской Федерации при проведении государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования

Во время работы экспертам запрещается:

- иметь при себе средства связи, фото-, аудио- и видеоаппаратуру;
- копировать и выносить из помещений, в которых работает ПК, экзаменационные работы, критерии оценивания, протоколы проверки экзаменационных работ;
- разглашать информацию, содержащуюся в указанных материалах.

Также запрещается:

- без уважительной причины покидать аудиторию;
- переговариваться с другими экспертами ПК, если речь не идет о консультировании с председателем ПК или с экспертом ПК, назначенным по решению председателя ПК, консультантом.

Если у эксперта возникают вопросы или проблемы, он должен обратиться к председателю ПК или лицу, назначенному председателем ПК консультантом.

1. Критерии проверки и оценка решений задания 13

Задание №13 – тригонометрическое, логарифмическое или показательное уравнение.

Выделение решения уравнения в отдельный пункт *а* прямо указывает участникам экзамена на необходимость полного решения предложенного уравнения: при отсутствии в тексте конкретной работы ответа на вопрос пункта *а* задание №13 оценивается 0 баллов.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Комментарий. Ответ в задании с развернутым ответом – это решение и вывод (называемый ответом).

Задача 13 (демонстрационный вариант 2020 г.).

а) Решите уравнение

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos 2x=\sqrt{3}\cos x+1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

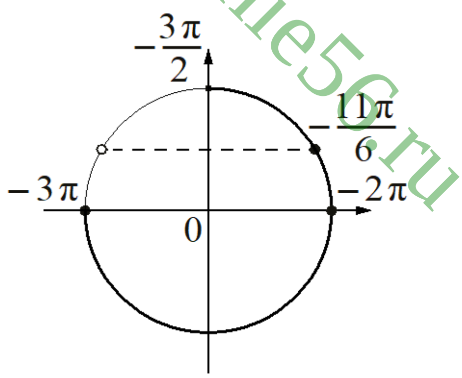
Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$\sin x+\sqrt{3}\cos x+1-2\sin^2 x=\sqrt{3}\cos x+1$; $\sin x-2\sin^2 x=0$; $\sin x\cdot(2\sin x-1)=0$.

Значит, $\sin x=0$, откуда $x=\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, или $\sin x=\frac{1}{2}$, откуда $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, или $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.



Получим числа: -3π; -2π; $-\frac{11\pi}{6}$.

Ответ: а) πk, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

$\frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$;

б) -3π; -2π; $-\frac{11\pi}{6}$.

***Комментарий*.**

Множество корней может записано по-другому.

Отбор корней может быть произведен любым другим способом: с помощью графика, решения двойных неравенств и т.п.

При отборе корней с помощью числовой (тригонометрической) окружности на числовой окружности должно быть: отмечены и обозначены концы числового отрезка, выделена дуга, отмечены и обозначены корни, принадлежащие данному отрезку. На окружности могут быть отмечены вспомогательные числа, принадлежащие числовому отрезку.

Задание 1

а) Решите уравнение

$$\cos 2x+2=\sqrt{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right).$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

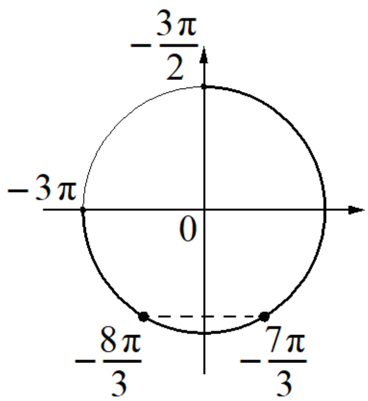
$$1-2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x+2=0;\ \left(2\sin x+\sqrt{3}\right)\left(\sin x-\sqrt{3}\right)=0.$$

Значит, $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, или $x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$.

Уравнение $\sin x=\sqrt{3}$ корней не имеет.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$.

Получим числа: $-\frac{8\pi}{3}$; $-\frac{7\pi}{3}$.



Ответ: а) $-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $-\frac{2\pi}{3}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{8\pi}{3}$; $-\frac{7\pi}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 2

а) Решите уравнение

$$9\cdot 81^{\cos x}-28\cdot 9^{\cos x}+3=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$.

Решение.

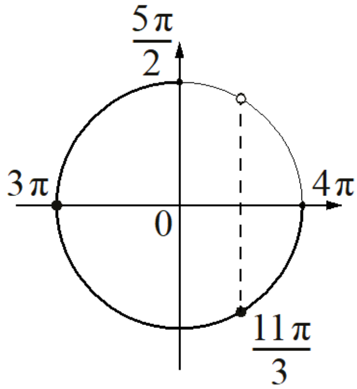
а) Пусть $t=9^{\cos x}$, тогда уравнение запишется в виде $9t^2-28t+3=0$, откуда $t=\frac{1}{9}$ или $t=3$.

При $t=\frac{1}{9}$ получим: $9^{\cos x}=\frac{1}{9}$; $\cos x=-1$, откуда $x=\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

При $t=3$ получим: $9^{\cos x}=3$; $\cos x=\frac{1}{2}$, откуда $x=\frac{\pi}{3}+2\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$, или $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$.

Получим числа: 3π; $\frac{11\pi}{3}$.



Ответ: а) $\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{3}+2\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) 3π; $\frac{11\pi}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 3

а) Решите уравнение

$$2\log_4^2(4\sin x)-5\log_4(4\sin x)+2=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$.

Решение.

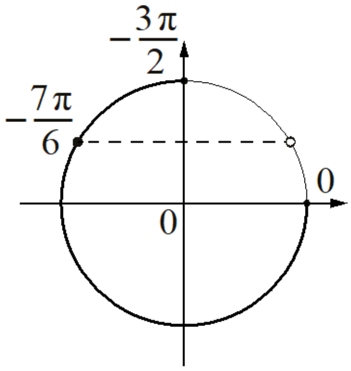
а) Пусть $t=\log_4(4\sin x)$, тогда исходное уравнение запишется в виде $2t^2-5t+2=0$, откуда $t=2$ или $t=\frac{1}{2}$.

При $t=2$ получим: $\log_4(4\sin x)=2$, значит, $\sin x=4$, что невозможно.

При $t=\frac{1}{2}$ получим: $\log_4(4\sin x)=\frac{1}{2}$, значит, $\sin x=\frac{1}{2}$, откуда $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, или $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$.

Получим число $-\frac{7\pi}{6}$.



Ответ: а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов — пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 4

а) Решите уравнение

$$\cos 2x + 0,5 = \cos^2 x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

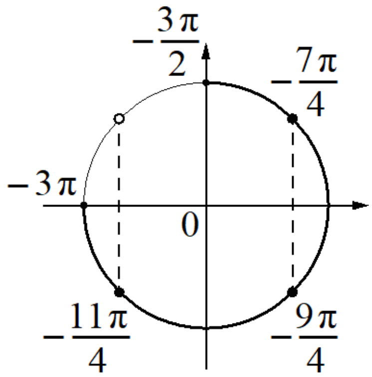
а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$2\cos^2 x - 1 + 0,5 = \cos^2 x; \ \left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0.$$

Значит, или $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, или $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$, или $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, или $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Получим числа: $-\frac{11\pi}{4}$; $-\frac{9\pi}{4}$; $-\frac{7\pi}{4}$.



Ответ: а) $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{3\pi}{4} + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$;

б) $-\frac{11\pi}{4}$; $-\frac{9\pi}{4}$; $-\frac{7\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Примеры оценивания решений задания 13

Пример 1.

а) Решите уравнение $\cos 2x + 2 = \sqrt{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{8\pi}{3}$; $-\frac{7\pi}{3}$.

13) а) $\cos 2x + 2 = \sqrt{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

$1 - 2\sin^2 x + 2 = -\sqrt{3}\sin x$

$-2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x + 3 = 0$

Пусть $\sin x = t$, тогда

$-2t^2 + \sqrt{3}t + 3 = 0$

$D = b^2 - 4ac = (\sqrt{3})^2 - 4\cdot(-2)\cdot 3 = 3 + 24 = 27$

$t = \frac{-\sqrt{3} \pm 3\sqrt{3}}{-4}$ $\quad t_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $t_2 = \sqrt{3}$

Значит, $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ или $\sin x = \sqrt{3}$

1) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x_1 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

2) $\sin x = \sqrt{3}$ – нет решений, т.к. $-1 \le \sin x \le 1$, а $|\sqrt{3}| > 1$

б) Найдем корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$

1) $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$

$-3\pi \le -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \le -\frac{3\pi}{2}$

$-3 \le -\frac{1}{3} + 2k \le -\frac{3}{2}$

$-3 + \frac{1}{3} \le 2k \le -\frac{3}{2} + \frac{1}{3}$

$-\frac{8}{3} \le 2k \le -\frac{7}{6}$

$-\frac{16}{2\cdot 6} \le k \le -\frac{7}{12}$

$-\frac{16}{12} \le k \le -\frac{7}{12}$

$-1\frac{1}{3} \le k \le -\frac{7}{12}$, т.к. $k \in \mathbb{Z}$, то $k = -1$

Если $k = -1$, то $x = -\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{\pi}{3} - \frac{3\pi\cdot 2}{3} - \frac{8\pi - \pi}{3} = -\frac{7\pi}{3}$

2) $-3\pi \le \frac{4\pi}{3} + 2\pi k \le -\frac{3\pi}{2}$

$-3\pi - \frac{4\pi}{3} \le 2\pi n \le -\frac{3\pi}{2} - \frac{4\pi}{3}$

$-\frac{13\pi}{3} \le 2\pi n \le -\frac{17\pi}{6}$

$-\frac{13}{6} \le n \le -\frac{17}{12}$

$-\frac{26}{12} \le n \le -\frac{17}{12}$

$-2\frac{1}{6} \le n \le -\frac{17}{12} = -1\frac{5}{12}, n \in \mathbb{Z}$

$n = -2$

Если $n = -2$, то $x = \frac{4\pi}{3} - 4\pi = -\frac{8\pi}{3}$

Ответ: а) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k$; $\frac{4\pi}{3} + 2\pi n$; $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$

б) $-\frac{8\pi}{3}$; $-\frac{7\pi}{3}$

Комментарий.

Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 2.

а) Решите уравнение $\cos 2x + 2 = \sqrt{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{8\pi}{3}$; $-\frac{7\pi}{3}$.

13)а) $\cos 2x + 2 = \sqrt{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$
$\cos 2x + 2 = \sqrt{3} \cdot (-\sin x)$
$1 - 2\sin^2 x + 2 = -\sqrt{3} \cdot \sin x$
$-2\sin^2 x + 3 + \sqrt{3}\sin x = 0$
Пусть $\sin x = y$
Тогда
$-2y^2 + 3 + \sqrt{3}\,y = 0$
$D = \sqrt{3 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)} = \sqrt{27} > 0$ 2 корня
$y_1 = \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{27}}{-4} = \frac{-\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{-4} = \frac{2\sqrt{3}}{-4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
$y_2 = \frac{-\sqrt{3} - \sqrt{27}}{-4} = \frac{-4\sqrt{3}}{-4} = \sqrt{3}$
Обратно $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \sin x = \sqrt{3}$
$x = (-1)^n \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi n$ $n \in Z$ $\quad$ нет решен
$\sin x \in [-$
б)
При $n = 0$
$x = -\frac{\pi}{3} \notin \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$
При $n = -1$
$x = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3} \notin \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$
При $n = -2$
$x = -\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{7\pi}{3} \in \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$
При $n = -3$
$x = \frac{\pi}{3} - 3\pi = -\frac{8\pi}{3} \in \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$
Ответ: а) $x = (-1)^n \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi n$ $n \in Z$
б) $-\frac{8\pi}{3}$; $-\frac{7\pi}{3}$

***Комментарий*.**
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*, но отбор корней нельзя назвать обоснованным, так как перебор остановлен на корне, принадлежащем отрезку. Типичный пример выставления 1 балла.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 3.

а) Решите уравнение $\cos 2x + 2 = \sqrt{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{8\pi}{3}$; $-\frac{7\pi}{3}$.

13 а) $\cos 2x + 2 = \sqrt{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

$\cos^2 x - \sin^2 x + 2 = \sqrt{3}\cdot\sin x$

$1 - \sin^2 x - \sin^2 x - \sqrt{3}\sin x + 2 = 0$

$-2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x + 3 = 0$

$2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x - 3 = 0$

замена $\sin x = t$, $t \in [-1; 1]$

$2t^2 + \sqrt{3}t - 3 = 0$

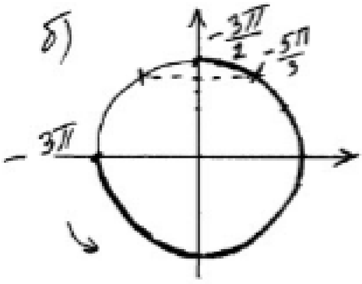
$D = 3 - 4\cdot 2\cdot(-3) = 3 + 24 = 27 = (3\sqrt{3})^2$

$t_1 = \frac{-\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $t_2 = \frac{-\sqrt{3} - 3\sqrt{3}}{4} = -\frac{4\sqrt{3}}{4} = -\sqrt{3}$

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\sin x = -\sqrt{3}$; $-\sqrt{3} \notin [-1; 1]$

$x = (-1)^k\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$.

б)



$\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$

Ответ: а) $(-1)^k\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$;

б) $-\frac{5\pi}{3}$.

Комментарий.

Тригонометрическое уравнение решено неверно. Во второй строчке в правой части отсутствует знак минус – ошибка в формуле приведения. Пункт *а* не выполнен (не из-за вычислительной ошибки).

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 4.

а) Решите уравнение $9\cdot 81^{\cos x}-28\cdot 9^{\cos x}+3=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$.

Ответ: а) $\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{3}+2\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) 3π; $\frac{11\pi}{3}$.

13. $9\ 81^{\cos x}-28\ 9^{\cos x}+3=0$

$9\cdot(9^{\cos x})^2-28\ 9^{\cos x}+3\ 0$

$9^{\cos x}=t$, тогда

$9t^2-28t+3=0$

$D=784-108=676$

$t=\frac{28\pm 26}{18}$ $\quad t_1=\frac{1}{9}$ $\quad t_2=3$

$9^{\cos x}=\frac{1}{9}$ $\quad 9^{\cos x}=3$

$9^{\cos x}=9^{-1}$ $\quad 3^{2\cos x}=3^1$

$\cos x=-1$ $\quad 2\cos x=1$ $\quad \cos x=\frac{1}{2}$

$x_1=\pi+2\pi n, n\in Z$ $\quad x_2=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$, объединяя

x_1 и x_2 получаем $x=\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi k}{3}, k\in Z$

б) $\frac{11\pi}{3}; 3\pi; 4\pi \in \left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$

Ответ: а) $\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi k}{3}, k\in Z$, б) $3\pi, \frac{11\pi}{3}; 4\pi$.

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*, но при отборе корней отсутствует решение и ошибочно указано число, которое не является корнем тригонометрического уравнения. Типичный пример выполнения задания на 1 балл.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 5.

а) Решите уравнение $9\cdot 81^{\cos x} - 28\cdot 9^{\cos x} + 3 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Ответ: а) $\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{3} + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) 3π; $\frac{11\pi}{3}$.

1 3. а) $9\cdot 81^{\cos x} - 28\cdot 9^{\cos x} + 3 = 0$

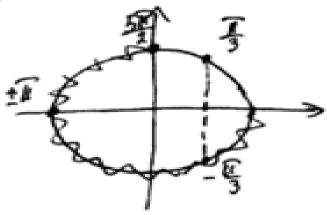
$9\cdot 3^{4\cos x} - 28\cdot 3^{2\cos x} + 3 = 0$

Пусть $3^{2\cos x} = t$, то $9\cdot t^2 - 28\cdot t + 3 = 0$

$D = 784 - 4\cdot 9\cdot 3 = 676$

$t_1 = \frac{28-26}{18} = \frac{1}{9}$

$t_2 = \frac{28+26}{18} = 3$



$3^{2\cos x} = \frac{1}{9}$

$3^{2\cos x} = 3^{-2}$

$\cos x = -1$

$x = \pm\pi + 2\pi k, k \in Z$.

$3^{2\cos x} = 3^1$

$\cos x = \frac{1}{2}$

$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$.

б) $[\frac{5\pi}{2}; 4\pi]$

$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, не подходит.

1. $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$

$+2,5\pi < -\frac{\pi}{3} + 2\pi k < 4\pi \quad |:\pi$

$2,5 < -\frac{1}{3} + 2k < 4$

$2\frac{3}{6} + \frac{2}{6} < 2k < 4\frac{1}{3} \quad |:2$

$1\frac{5}{6} < k < 2\frac{1}{3}$

$\Rightarrow k = 2 \qquad x = -\frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{11\pi}{3}$

2. $x = \pi + 2\pi k, k \in Z$.

$2,5\pi < \pi + 2\pi k < 4\pi \quad |:\pi\ -1$

$2,5 - 1 < 2k < 4 - 1 \quad |:2$.

$0,75 < k < 1,5$

$\Rightarrow k = 1$.

$x = \pi + 2\pi = 3\pi$.

3. $x = -\pi + 2\pi k$

$2,5\pi < -\pi + 2\pi k < 4\pi \quad |:2\pi$

$1,75 < k < 2,5$

$\Rightarrow k = 2$.

$x = -\pi + 4\pi = 3\pi$.

Ответ: $x = 3\pi$, $x = \frac{11\pi}{3}$

***Комментарий*.**

В записи корней первого простейшего уравнения содержится дублирующая запись корней, но ошибки в этом нет. При отборе корней допущены ошибки при делении $2\frac{5}{6}$ и $4\frac{1}{3}$ на 2.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 6.

а) Решите уравнение $9\cdot 81^{\cos x}-28\cdot 9^{\cos x}+3=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$.

Ответ: а) $\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{3}+2\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) 3π; $\frac{11\pi}{3}$.

13. а) $9\cdot 81^{\cos x}-28\cdot 9^{\cos x}+3=0$

$9\cdot (9^2)^{\cos x}-28\cdot 9^{\cos x}+3=0$

Пусть $9^{\cos x}=t$, тогда:

$9t^2-28t+3=0$

$D=(-28)^2-4\cdot 9\cdot 3=784-108=676$

$t_1=\frac{28-26}{2\cdot 9}=\frac{2}{18}=\frac{1}{9}$; $t_2=\frac{28+26}{2\cdot 9}=\frac{54}{18}=3$

Вернемся к замене: $9^{\cos x}=\frac{1}{9}$ или $9^{\cos x}=3$

$\cos x=-1$

$x=\pi+\pi d, d\in Z$

$(3^2)^{\cos x}=3^1$

$2\cos x=1$

$\cos x=\frac{1}{2}$

$x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$

б) $[\frac{5\pi}{2};4\pi]$

$\frac{5\pi}{2}\le\frac{\pi}{3}+2\pi n\le 4\pi$;

$\frac{5}{2}\le\frac{1}{3}+2n\le 4, n\in Z$

$2\frac{1}{6}\le 2n\le 3\frac{2}{3}, n\in Z$

$1\frac{1}{12}\le n\le 1\frac{5}{6}, n\in Z$

n - нет чисел

$\frac{5\pi}{2}\le-\frac{\pi}{3}+2\pi k\le 4\pi$

$\frac{5}{2}\le-\frac{1}{3}+2k\le 4, k\in Z$

$2\frac{5}{6}\le 2k\le 4\frac{1}{3}, k\in Z$

$1\frac{5}{12}\le k\le 2\frac{1}{6}, k\in Z$

$k=2$

$x_1=-\frac{\pi}{3}+2\cdot 2\pi=\frac{11\pi}{3}$

$\frac{5\pi}{2}\le\pi+\pi d\le 4\pi$

$\frac{5}{2}\le 1+d\le 4, d\in Z$

$1\frac{1}{2}\le d\le 3, d\in Z$

$d=2,3$

$x_2=\pi+2\pi=3\pi$

$x_3=\pi+4\pi=5\pi$

Ответ: а) $x=\pi+\pi d, d\in Z$; $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$;

б) $x_1=\frac{11\pi}{3}$; $x_2=3\pi$; $x_3=5\pi$

Комментарий.

Тригонометрическое уравнение $\cos x=-1$ решено неверно.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 7.

а) Решите уравнение $2\log_4^2(4\sin x)-5\log_4(4\sin x)+2=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{6}$.

а) $2\log_4^2(4\sin x)-5\log_4(4\sin x)+2=0$, $\log_4(4\sin x)=t$,

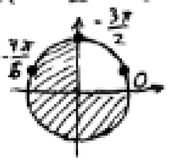
$2t^2-5t+2=0$; $D=25-16=9=3^2$, $t_1=\frac{5-3}{4}=\frac{1}{2}$; $t_2=\frac{5+3}{4}=1$;

$\log_4(4\sin x)=t_1=\frac{1}{2}$; $\log_4(4\sin x)=\log_4 2$, $4\sin x=2$; $\sin x=\frac{1}{2}$;

$x=\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in Z$; $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in Z$;

$\log_4(4\sin x)=t_2=1$; $\log_4(4\sin x)=\log_4 4$; $4\sin x=4$; $\sin x=1$;

$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$ Ответ: $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in Z$

б) 

Ответ: $-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{7\pi}{6}$.

***Комментарий*.**
Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки при вычислении t_2, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 8.

а) Решите уравнение $2\log_4^2(4\sin x)-5\log_4(4\sin x)+2=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{6}$.

13) а) ОДЗ: $4\sin x > 0$

$\sin x > 0$

Для таких x решим методом интервалов

Пусть $\log_4(4\sin x)=t$; $t \geqslant 0$

$2t^2-5t+2=0$

$D=25-4\cdot2\cdot2$

$D=25-16$

$D=9$

$t_1=\frac{5+3}{2}$ $t_1=4$

$t_2=\frac{5-3}{2}$ $t_2=1$

Обратная замена

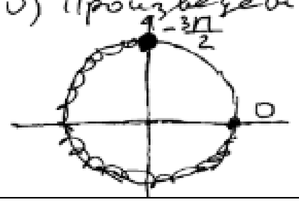
$\log_4(4\sin x)=1$ или $\log_4(4\sin x)=4$

$4\sin x=4$ $4\sin x=256$

$\sin x=1$ $\sin x=64$

$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$ Нет решений.

б) Произведём отбор на единичной окружности



$-\frac{3\pi}{2}$

Ответ: а) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n; n\in Z$ б) $-\frac{3\pi}{2}$

***Комментарий*.**

Получены неверные ответы не из-за вычислительной ошибки при нахождении корней квадратного уравнения.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 9.

а) Решите уравнение $2\log_4^2(4\sin x)-5\log_4(4\sin x)+2=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{6}$.

а) $2\log_4^2(4\sin x)-5\log_4(4\sin x)+2=0$

Пусть $\log_4(4\sin x)=t$, тогда:

$2t^2-5t+2=0$

$D=25-16=9=(3)^2$

$t_1=\frac{5+3}{4}=2$; $t_2=\frac{5-3}{4}=\frac{1}{2}$;

(1) $\log_4(4\sin x)=2$;

$4\sin x=16$;

$\sin x=4$ - таких x не существует, так как $\sin\in[-1;1]$;

(2) $\log_4(4\sin x)=\frac{1}{2}$;

$4\sin x=2$;

$\sin x=\frac{1}{2}$;

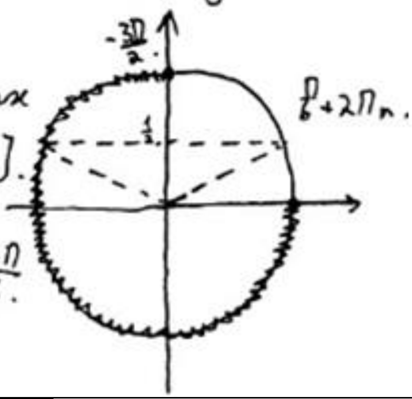
$x=\frac{\pi}{6}+2\pi n$ и $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n$.

б) $[-\frac{3\pi}{2};0]$

Рассмотрим на единичной окружности данный отрезок и корни;

~~по~~ корень $\frac{\pi}{6}+2\pi n$ ни при каких условиях не будет лежать на $[-\frac{3\pi}{2};0]$.

корень $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$ попадет на этот отрезок в точке $\frac{5\pi}{6}-2\pi=-\frac{7\pi}{6}$.



Ответ: а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$; б) $-\frac{7\pi}{6}$.

***Комментарий*.**

Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*, но отбор корней с помощью числовой окружности в этом решении нельзя считать обоснованным. Типичный пример выполнения задания на 1 балл.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 10.

а) Решите уравнение $2\log_4^2(4\sin x)-5\log_4(4\sin x)+2=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{6}$.

№13 $2\log_4^2(4\sin x)-5\log_4(4\sin x)+2=0$ $\log_4(4\sin x)=t$

ОДЗ $4\sin x\neq 0$, $\sin x\neq 0$, $x\neq \pi n$, $n\in Z$

$2t^2-5t+2=0$ $D=25-16=9$

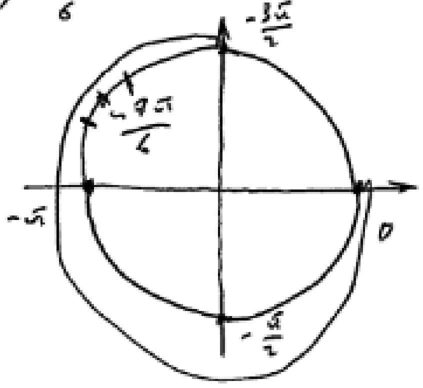
$t_1=\frac{5-3}{4}=\frac{1}{2}$

$t_2=\frac{5+3}{4}=2$

$\left[\begin{array}{l}\log_4(4\sin x)=2\\ \log_4(4\sin x)=\frac{1}{2}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}8=4\sin x\\ 2=4\sin x\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\sin x=2\\ \sin x=\frac{1}{2}\end{array}\right.$ не подходит т.к. $-1\leq \sin x\leq 1$

$x=\frac{\pi}{6}+2\pi n$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$ $n\in Z$

$\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$



Ответ: а) $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$

б) же $-\frac{7\pi}{6}$ $n\in Z$

Ответ: а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$; б) $-\frac{7\pi}{6}$.

***Комментарий*.**

При решении простейшего логарифмического уравнения допущена ошибка, которая не является вычислительной, кроме того, при нахождении ОДЗ допущена ошибка, которая никак не может быть отнесена к вычислительной. Любая из этих ошибок уже не позволяет выставить положительный балл. Типичный пример выставления 0 баллов.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 11.

а) Решите уравнение $\cos 2x + 0{,}5 = \cos^2 x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{3\pi}{4} + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$;

б) $-\frac{11\pi}{4}$; $-\frac{9\pi}{4}$; $-\frac{7\pi}{4}$.

№13.

а) $\cos 2x + 0{,}5 = \cos^2 x$

$2\cos^2 x - 1 + 0{,}5 - \cos^2 x = 0$

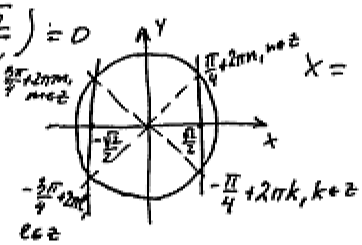
$\cos^2 x - \frac{1}{2} = 0$

$\left(\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$

$\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$

1. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
2. $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

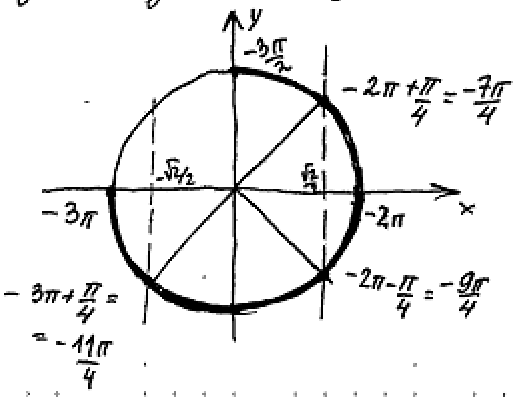
$\Rightarrow$



$x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in z$

а) Ответ: $\pm\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in z$.

б) $x \in \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$. Для отбора корней построим единичную окружность.



б) Ответ: $-\frac{11\pi}{4}$; $-\frac{9\pi}{4}$; $-\frac{7\pi}{4}$.

***Комментарий*.**

Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.

Оценка эксперта: 2 балла.

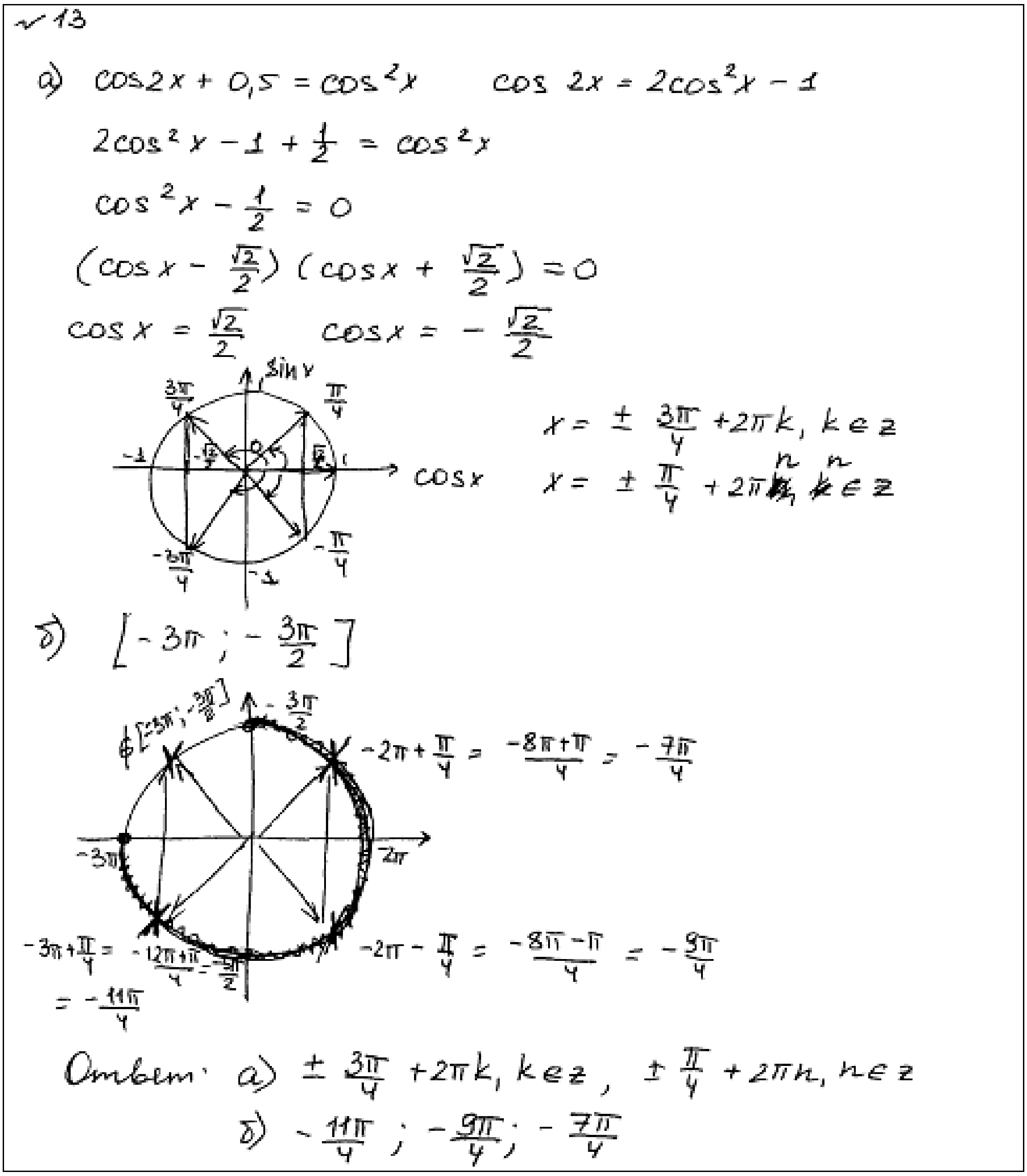
Пример 12.

а) Решите уравнение $\cos 2x + 0{,}5 = \cos^2 x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{3\pi}{4} + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$;

б) $-\frac{11\pi}{4}$; $-\frac{9\pi}{4}$; $-\frac{7\pi}{4}$.


№ 13

а) $\cos 2x + 0{,}5 = \cos^2 x$ $\qquad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$2\cos^2 x - 1 + \frac{1}{2} = \cos^2 x$

$\cos^2 x - \frac{1}{2} = 0$

$\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$

$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in z$

$x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in z$

б) $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$

$-2\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{-8\pi + \pi}{4} = -\frac{7\pi}{4}$

$-2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{-8\pi - \pi}{4} = -\frac{9\pi}{4}$

$-3\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{-12\pi + \pi}{4} = -\frac{11\pi}{4}$

Ответ: а) $\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in z$, $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in z$

б) $-\frac{11\pi}{4}$; $-\frac{9\pi}{4}$; $-\frac{7\pi}{4}$

Комментарий.

Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.

Оценка эксперта: 2 балла.

2. Критерии проверки и оценка решений задания 14

Задание 14 – стереометрическая задача, она разделена на пункты *а* и *б*. Для получения 2 баллов нужно, чтобы были выполнены оба пункта, а для получения 1 балла хватает выполнения одного из этих пунктов.

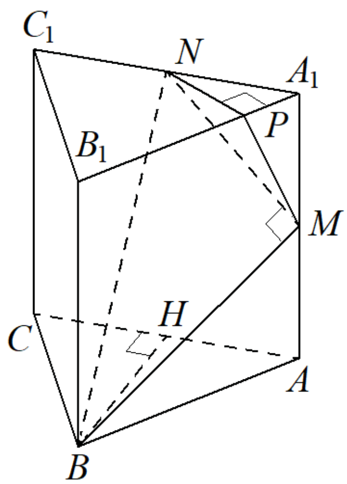
Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задача 14 (демонстрационный вариант 2020 г.).

Все рёбра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину 6. Точки M и N — середины рёбер AA_1 и A_1C_1 соответственно.

а) Докажите, что прямые BM и MN перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями BMN и ABB_1.



Решение. а) Пусть точка H — середина AC. Тогда

$$BN^2 = BH^2 + NH^2 = \left(3\sqrt{3}\right)^2 + 6^2 = 63.$$

Вместе с тем

$$BM^2 + MN^2 = (3^2 + 6^2) + (3^2 + 3^2) = 63,$$

а тогда по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник BMN является прямоугольным с прямым углом M.

б) Проведём перпендикуляр NP к прямой A_1B_1. Тогда $NP \perp A_1B_1$ и $NP \perp A_1A$. Следовательно, $NP \perp ABB_1$. Поэтому MP — проекция MN на плоскость ABB_1.

Прямая BM перпендикулярна MN, тогда по теореме о трёх перпендикулярах $BM \perp MP$. Следовательно, угол NMP — линейный угол искомого угла.

Длина NP равна половине высоты треугольника $A_1B_1C_1$, то есть $NP = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Поэтому $\sin\angle NMP = \dfrac{NP}{MN} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2\cdot 3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$. Следовательно, $\angle NMP = \arcsin\sqrt{\dfrac{3}{8}}$.

Ответ: б) $\arcsin\sqrt{\dfrac{3}{8}}$.

Задание 1

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На рёбрах AB и B_1C_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $AK = B_1L = 2$. Точка M — середина ребра A_1C_1. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой — точка M, а основание — сечение данной призмы плоскостью γ.

Решение.

а) Проведём через точки K и L прямые, параллельные AC. Пусть эти прямые пересекают рёбра BC и A_1B_1 в точках K_1 и L_1 соответственно (рис. 1). Тогда трапеция KL_1LK_1 является сечением исходной призмы плоскостью γ. Рассмотрим плоскость BB_1M. Пусть эта плоскость пересекает прямые AC, KK_1 и LL_1 в точках N, E и F соответственно. Четырёхугольник BB_1MN — прямоугольник, причём $BB_1 = 3$, $B_1M = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot A_1B_1 = 3\sqrt{3}$.

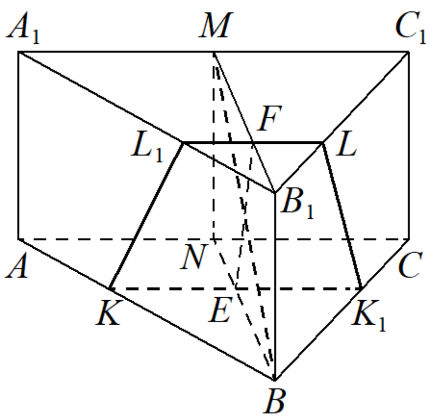


Рис. 1

Кроме того, $NE : EB = AK : KB = 1:2$, $B_1F : FM = B_1L : LC_1 = 1:2$, откуда $MF = 2\sqrt{3}$, $NE = \sqrt{3}$. Пусть EH — высота трапеции $EFMN$ (рис. 2), тогда $FH = MF - NE = \sqrt{3}$.

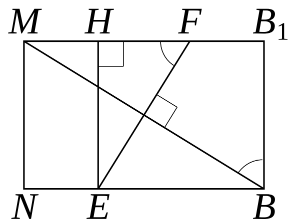


Рис. 2

Поскольку $\operatorname{tg}\angle MFE = \frac{EH}{FH} = \sqrt{3} = \frac{MB_1}{BB_1} = \operatorname{tg}\angle MBB_1$,

$\angle MFE = \angle MBB_1 = 90° - \angle BMF$,

то есть прямые EF и BM перпендикулярны.

Прямая KK_1 параллельна прямой AC, которая перпендикулярна плоскости BB_1M. Значит, прямые KK_1 и EF перпендикулярны прямой BM, поэтому прямая BM перпендикулярна плоскости γ.

б) Расстояние от точки M до плоскости γ равно $MF \cdot \sin\angle MFE$, а площадь трапеции KL_1LK_1 равна

$$\frac{KK_1 + LL_1}{2} \cdot EF = \frac{\frac{2}{3}AC + \frac{1}{3}A_1C_1}{2} \cdot \frac{EH}{\sin\angle MFE} = \frac{9}{\sin\angle MFE}.$$

Значит, искомый объём равен $\frac{1}{3} \cdot MF \cdot \sin\angle MFE \cdot \frac{9}{\sin\angle MFE} = 6\sqrt{3}$.

Ответ: б) $6\sqrt{3}$.

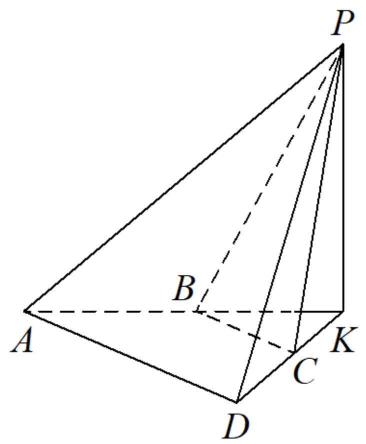
Задание 2

Основанием четырёхугольной пирамиды $PABCD$ является трапеция $ABCD$, причём $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$. Плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, K — точка пересечения прямых AB и CD.

а) Докажите, что плоскости PAB и PCD перпендикулярны.

б) Найдите объём пирамиды $KBCP$, если $AB = BC = CD = 4$, а высота пирамиды $PABCD$ равна 9.

Решение.



а) Заметим, что $\angle AKD = 90^\circ$. Плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, поэтому они пересекаются по прямой, содержащей высоту пирамиды. Значит, PK — высота пирамиды. Таким образом, угол $\angle AKD$ является линейным углом двугранного угла между плоскостями PAB и PCD. Значит, они перпендикулярны.

б) Поскольку $AB = CD$, трапеция $ABCD$ является равнобедренной. Значит,

$$\angle BAD = \angle ADC = \angle KBC = \angle KCB = 45^\circ;$$

$$BK = CK = \frac{\sqrt{2}}{2} BC = 2\sqrt{2}.$$

Таким образом, площадь треугольника KBC равна $S_{KBC} = \dfrac{BK \cdot CK}{2} = 4$,

а объём пирамиды $KBCP$ равен $\dfrac{PK \cdot S_{KBC}}{3} = 12$.

Ответ: б) 12.

Задание 3

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах CD и SC отмечены точки N и K соответственно, причём $DN:NC = SK:KC = 1:5$. Плоскость α содержит прямую KN и параллельна прямой SA.

а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой BC.

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости α.

Решение.

а) По условию $DN:NC = SK:KC$, значит, прямые SD и KN параллельны. Следовательно, плоскости SAD и α параллельны (рис. 1).

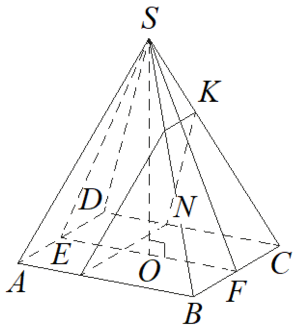


Рис. 1

Поскольку отрезки BC и AD параллельны, а плоскость α параллельна плоскости SAD, прямая BC параллельна плоскости α.

б) Поскольку плоскость α параллельна прямой BC, расстояние от точки C до плоскости α равно расстоянию от прямой BC до плоскости α. Пусть точки E и F — середины рёбер AD и BC соответственно. Тогда прямые SF и EF перпендикулярны прямой BC. Таким образом, плоскость SEF перпендикулярна прямой BC и параллельной ей плоскости α. Пусть плоскость α пересекает прямые SF и EF в точках Q и R соответственно (рис. 2). Тогда искомое расстояние равно расстоянию h от точки F до прямой QR. Высота SO пирамиды $SABCD$ лежит в плоскости SEF, откуда

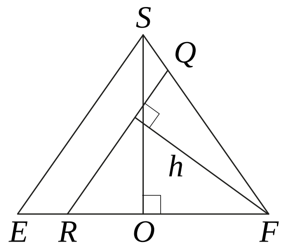


Рис. 2

$$EF = 6,\ SE = \sqrt{SA^2 - \frac{AD^2}{4}} = 2\sqrt{10};\ \cos\angle SEO = \frac{EF}{2SE} = \frac{3}{2\sqrt{10}}.$$

Плоскости SAD и α параллельны, поэтому $\angle QRF = \angle SEO$, откуда

$$h = RF\sin\angle QRF = \frac{5EF}{6}\cdot\sqrt{1-\frac{9}{40}} = \frac{\sqrt{310}}{4}.$$

Ответ: б) $\dfrac{\sqrt{310}}{4}$.

Примеры оценивания выполнения задания 14

Пример 1.

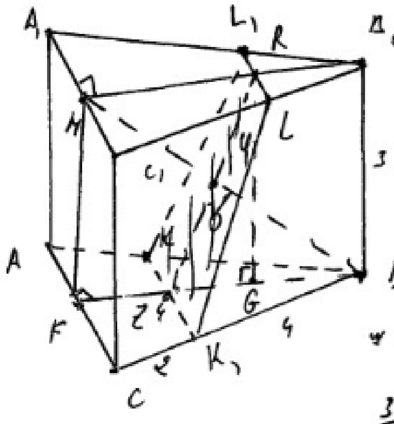
В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На рёбрах AB и B_1C_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $AK = B_1L = 2$. Точка M — середина ребра A_1C_1. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой — точка M, а основание — сечение данной призмы плоскостью γ.

Ответ: б) $6\sqrt{3}$.

№ 14



Решение.

$BF = \sqrt{BC^2 - FC^2} = \sqrt{36-9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

$FM \perp AC$; $= B_1B$

$BM = \sqrt{FM^2 + BF^2} = \sqrt{9+27} = \sqrt{36} = 6$

В $\triangle BZK$ (?): $\frac{BF}{BZ} = \frac{CB}{K_1B} = \frac{CB}{K_1B}$

~~$\frac{3\sqrt{3}}{BZ} = \frac{4}{6}$; $4BZ = 18\sqrt{3}$~~ ; $BZ =$

$\frac{3\sqrt{3}}{BZ} = \frac{6}{4}$ $6BZ = 12\sqrt{3}$ $BZ = 2\sqrt{3}$

Дано

$ABCA_1B_1C_1$ – прав. треуг. призм.

$AA_1 = 3$; $AB = 6$; $AK = 2$; $B_1L = 2$. $A_1M = MC_1 = 3$.

φ – плоскость $\parallel AC$ и прох. содержащая K; L.

а) Док-ть $BM \perp \varphi$

б) $V = AKK_1LL_1$

$RG \parallel B_1B$ $RG = B_1B$. $ZG = FB - (FZ + GB)$ $FZ = GB = \sqrt{3} = \frac{1}{3}ZB$

$ZG = 3\sqrt{3} - (\sqrt{3} + \sqrt{3}) = \sqrt{3}$. $RZ = \sqrt{RG^2 + ZG^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

~~$\triangle BFH \sim \triangle BOZ$ по общ $\angle HBF$ и $BO = OH$ т.к. $RB_1 = FZ$~~

$\triangle ZOB = \triangle MOR$ т.к. $\angle MOR = \angle ZOB$ (т.к. они вертикальные),

$ZB = MR = 2\sqrt{3}$, $\angle ZBM = \angle OMR$ т.к. это внутр. накрест. леж. углы при 2-ух ~~пр~~ $\parallel$ прям B_1M и FB. след. След. $RO = OZ$

По теорем пифагор. $ZB = \sqrt{BO^2 + ZO^2}$; $2\sqrt{3} = \sqrt{9+3}$ $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$ $2\sqrt{3}$

след $\triangle BZO$ – прямоуг.: след $BO \perp ZR$. след $BO \perp \varphi$ след $BM \perp \varphi$.

$V = \frac{1}{3} MO \cdot S_{KK_1LL_1} = \frac{1}{3}\, 3 \cdot \left(\left(\frac{KK_1 + LL_1}{2}\right) \cdot RZ\right) = 1 \left(\frac{2+4}{2} \cdot 2\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3}$

$= 1 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

~~Ответ: $12\sqrt{3}$.~~

Ответ: $6\sqrt{3}$.

№ 17.

Комментарий.

Доказательство утверждения в пункте *а* недостаточно обоснованно. С использованием утверждения пункта *а* верно получен ответ в пункте *б*.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 2.

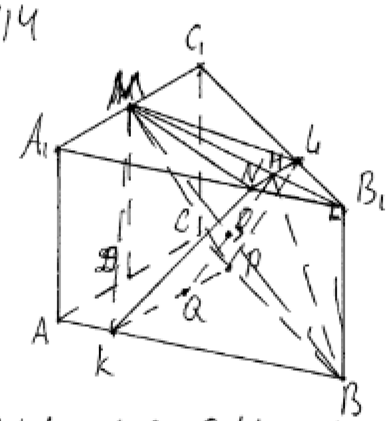
В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На рёбрах AB и B_1C_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $AK = B_1L = 2$. Точка M — середина ребра A_1C_1. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой — точка M, а основание — сечение данной призмы плоскостью γ.

Ответ: б) $6\sqrt{3}$.

N14



а) BM перпендикулярна любой прямой, параллельной AC и лежащей в плоскости (ABC) по теореме о 3-х перпендикулярах $\Rightarrow BM \perp PK$

Проведём QH ($QH \perp NL$ и $QH \perp KP$; $QH \cap BM = O$) $\Delta OHM \sim \Delta B_1BM$ по 2 призн. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle MOH = \angle MB_1B = 90°$. Т.к. $BM \perp PK$ и $BM \perp QH \Rightarrow$

$\Rightarrow BM \perp \gamma$. ч.т.д.

б) (·)O делит BM пополам. Из ΔBMB_1 по т. Пифагора $BM = 6 \Rightarrow BO = 3$. Из ΔB_1LH по т Пифагора $B_1H = \sqrt{3}$. Из ΔBHB_1 по т Пифагора $BH = 2\sqrt{3}$. Из ΔBOH по т. Пифагора $OH = \sqrt{3}$. (·)O делит QH пополам $\Rightarrow QH = 2OH = 2\sqrt{3}$

$V_{MKPLN} = \frac{1}{3} \cdot MO\, S_{KPLN} = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{2+4}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

($KPLN$ – р/б трапеция)

Ответ: $6\sqrt{3}$

Комментарий.

Утверждение в пункте *а* не доказано. В основе решения пункта *б* лежит необоснованное утверждение.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 3.

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На рёбрах AB и B_1C_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $AK = B_1L = 2$. Точка M — середина ребра A_1C_1. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой — точка M, а основание — сечение данной призмы плоскостью γ.

Ответ: б) $6\sqrt{3}$.

3) $\triangle BOK \sim \triangle BCA$ по 2-м углам ($\angle B$ - общий, $\angle BKO = \angle BAC$ как соотв.) $k_1 = \frac{2}{3}$ 4) аналогично $\triangle B_1EL \sim \triangle B_1A_1C_1$ $k_2 = \frac{1}{3}$

5) из (3) и (4) $B_1O_1 = \frac{1}{3} B_1M$ $BO = \frac{2}{3} BF$

6) $O_1M = B_1M - B_1O_1 = B_1M - \frac{1}{3} B_1M = \frac{2}{3} B_1M = \frac{2}{3} BF$

7) $\triangle O_1HM = \triangle BOH$ по 2-м углам и стороне между ними

($\angle MO_1H = \angle HOB$ как нак.леж. $\angle O_1MB = \angle MBO$ как н.л.

$O_1M = \frac{2}{3} B_1M = \frac{2}{3} BF = BO$)

Вычисление

а) 1) $B_1M = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ 2) $O_1M = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

3) $O_1T \perp BF$ в (BFM) 4) $TO = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$

5) по т. Пиф. $BM = \sqrt{9+27} = 6 \Rightarrow HM = BH = \frac{1}{2} \cdot BM = 3$.

6) $O_1O = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3} \Rightarrow O_1H = HO = \sqrt{3}$.

7) по теор. обратной теореме Пифагора т.к.

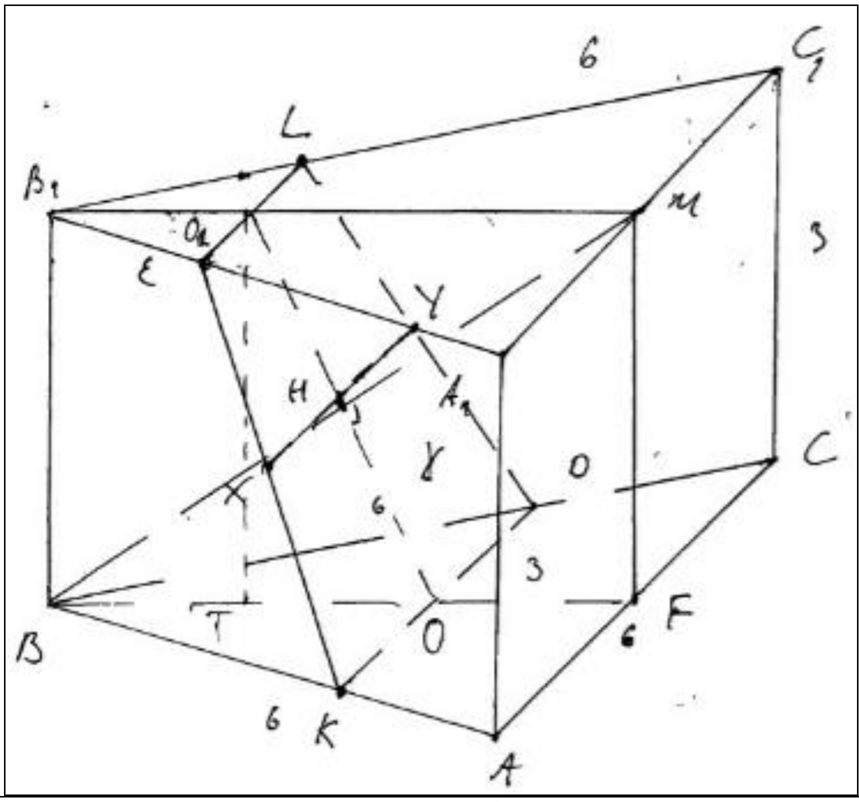
$O_1M^2 = O_1H^2 + HM^2 = 9+3 = 12$, то $\angle O_1HM = 90°$ и

$O_1H \perp MH$.

8) $MF \perp AC$ (т.к призма правильная) и $MF \perp KD$ т.к. $KD \parallel AC$

9) т.к. $EL \parallel KD$, то $ELKD$ – трапеция

10) XY – средняя линия тр. $ELKD$ и $O_1H = HO \Rightarrow H \in XY$ в плоскости (EKD) [redacted] См. на обороте



12) $XY \parallel KD$ $MF \perp KD$ и $MF \perp BF$, ~~тогда по ТТП~~
$KD \perp M$ ~~$MH \perp KD$~~. тогда по признаку перп. пр. и пл. $KD \perp (BFM) \Rightarrow$ любая прямая в пл. (BFM) перпендикулярна $KD \Rightarrow BM \perp KD$ и $BM \perp XY$ 12.1) $(KDL) = \gamma$

13) т. к. $BM \perp XY$ и $BM \perp O_1O$, то по признаку перп. пр. и пл. $BM \perp (KDL)$ и $BM \perp \gamma$ ч.т.д.

б) 1) $S_{LEKD} = \frac{1}{2}(EL + KD) \cdot O_1O$

2) $EL = A_1C_1 \cdot k_2 = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2$

3) $KD = AC \cdot k_1 = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4$

4) $S_{LEKD} = \frac{1}{2}(2+4) \cdot 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

5) $V_{MLEKD} = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot h = 6\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot MH = 6\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 = 6\sqrt{3}$

Ответ: $6\sqrt{3}$ куб.ед.

***Комментарий*.**
Доказательство утверждения в пункте *а* содержит неточности. В решении пункта *б* обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

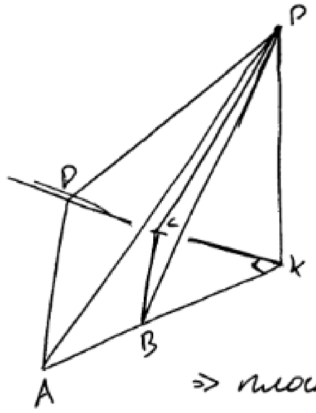
Пример 4.

Основанием четырёхугольной пирамиды $PABCD$ является трапеция $ABCD$, причём $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$. Плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, K — точка пересечения прямых AB и CD.

а) Докажите, что плоскости PAB и PCD перпендикулярны.

б) Найдите объём пирамиды $KBCP$, если $AB = BC = CD = 4$, а высота пирамиды $PABCD$ равна 9.

Ответ: б) 12.



а) $\angle BAD + \angle AD\cancel{K}C = 90^\circ \Rightarrow \angle DKB = 90^\circ$.

$\left.\begin{array}{l}\text{плоск.}(DKP) \perp \text{плоск}(ADK) \\ AK \perp DK\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow AK \perp \cancel{DPK}\ \text{пл.}(DPK) \Rightarrow$

$AK \subset \text{пл.}(AKP) \Rightarrow \text{пл.}(AKP) \perp \text{пл.}(DPK) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ плоскости $PAB \perp$ пл-ти PCD.

б) $AB = BC = CD = 4$.

$AB = CD \Rightarrow$ трапеция - равн.бедр. $\Rightarrow \angle KAD = \angle ADK \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle KBC = \angle BCK \Rightarrow BK = CK = \frac{CB}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

$AK \perp \text{пл.}(DPK) \Rightarrow AK \perp PK$.

$\left.\begin{array}{l}\text{пл}(AKP) \perp \text{пл.}(ADK) \\ AK \perp DK\end{array}\right\} \Rightarrow DK \perp \text{пл.}(APK) \Rightarrow DK \perp PK$

$\left.\begin{array}{l}AK \perp PK \\ DK \perp PK\end{array}\right\} \Rightarrow PK \perp \text{пл.}(ADK) \Rightarrow PK$ - высота.

$V(KBCP) = \frac{1}{3} \cdot PK \cdot \frac{1}{2} \cdot CK \cdot BK = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} =$

$= 3 \cdot 4 = 12$.

Ответ: $V_{KBCP} = 12$.

Комментарий.

Утверждение в пункте *а* не доказано. В решении пункта *б* обоснованно получен верный ответ.

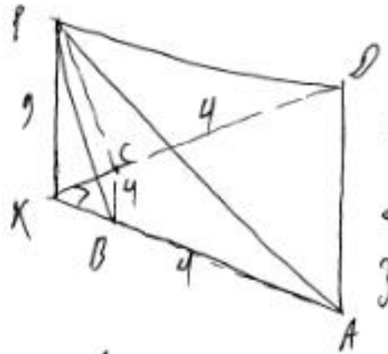
Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 5.

Основанием четырёхугольной пирамиды $PABCD$ является трапеция $ABCD$, причём $\angle BAD + \angle ADC = 90°$. Плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, K — точка пересечения прямых AB и CD.
а) Докажите, что плоскости PAB и PCD перпендикулярны.
б) Найдите объём пирамиды $KBCP$, если $AB = BC = CD = 4$, а высота пирамиды $PABCD$ равна 9.

Ответ: б) 12.

(14) Дано:
$PABCD$ – 4ур. пирамида
$ABCD$ – трапеция ($AD \parallel BC$)
$\angle BAD + \angle ADC = 90°$
$AB \cap CD = K$
а) Док-ть: $PAB \perp PCD$
б) Найти: V_{KBPC}, если $AB = BC = CD = 4$, $PK = 9$



а) PK – высота пирамиды
$\angle DKA = 180° - (\angle BAD + \angle ADC) = 90°$
Заметим, что $\angle DKA$ – линейный угол двугранного угла между плоскостями PAB и PCD, т.к. $DK \perp PK$ и $AK \perp PK$.
$\angle DKA = 90° \Rightarrow PAB \perp PCD$, ч.т.д.

б) $AB = BC = CD = 4 \Rightarrow AD = 8$;
$S_{ABCD} = \frac{4+8}{2}\sqrt{12} = 6 \cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$
S_{KCB}: $BC = \frac{AD}{2} \Rightarrow \triangle KCB \overset{\frac{1}{2}}{\sim} \triangle KDA \Rightarrow S_{KCB} = \frac{S_{AKD}}{4} \Rightarrow$
$\Rightarrow S_{KCB} = \frac{12\sqrt{3} + S_{KCB}}{4} \Leftrightarrow \frac{3S_{KCB}}{4} = 3\sqrt{3} \Rightarrow S_{KCB} = 4\sqrt{3}$
$V_{PKCB} = \frac{1}{3} PK \cdot S_{KCB} = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 4\sqrt{3} = 3 \cdot 4\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$.

Ответ: $12\sqrt{3}$

Комментарий.
Утверждение в пункте *а* не доказано. В решении пункта *б* допущена ошибка и получен неверный ответ.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 6.

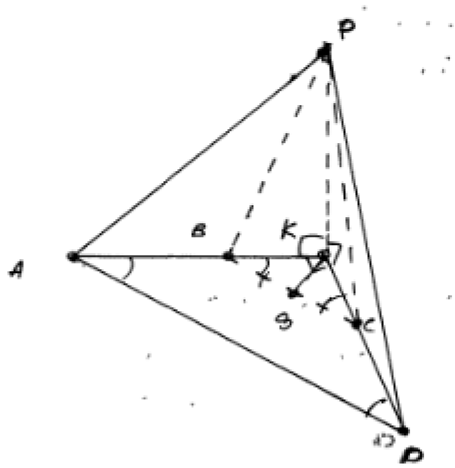
Основанием четырёхугольной пирамиды $PABCD$ является трапеция $ABCD$, причём $\angle BAD + \angle ADC = 90°$. Плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, K — точка пересечения прямых AB и CD.

а) Докажите, что плоскости PAB и PCD перпендикулярны.

б) Найдите объём пирамиды $KBCP$, если $AB = BC = CD = 4$, а высота пирамиды $PABCD$ равна 9.

Ответ: б) 12.

№14



Дано:
$\angle BAD + \angle ADC = 90°$
$(PAB) \perp (ADK)$
$(PCD) \perp (ADK)$
$ABCD$ – трапеция
$K = AB \cap CD$

а) Док-ть: $PAB \perp PCD$

б) $V_{KBCP} = ?$, если:
$AB = BC = CD = 4$
$PK = 9$

а) $BC \parallel AD$ (т.к. $ABCD$ – трапеция) $\Rightarrow \begin{cases} \angle KBC = \angle KAD \\ \angle KCB = \angle KDA \end{cases}$

(как ~~внутр. одностор. и внутр.~~ внешн. одностор. внешн. и внутр. при секущей AK и KD)

$\Rightarrow \angle KBC + \angle KCB = 90°$ (по условию $\angle BAD + \angle ABC = 90°$)

$\Rightarrow \angle BKC = 90°$ $(180° - \angle KBC - \angle KCB = 180° - 90° = 90°)$

Т.к. ~~PAK~~ $PAB \perp ADK$ и $PKD \perp ADK$, то

$\angle AKP = \angle DKP = 90° \Rightarrow AK \perp PK$ и $AK \perp DK \Rightarrow$

$\Rightarrow PAK \perp PKD$ ч.т.д.

б) $AB = CD \Rightarrow ABCD$ – равнобокая трапеция.
$\angle BAD + \angle CDA = 90°$
$\angle BAD = \angle CDA$ (как углы при основании равнобок. трап.)
$\Rightarrow \angle KBC = \angle KCB = 45°$

$\Rightarrow \Delta KBC$ – равнобедр. прямоугольный треуг.
Опустим из K перпендикуляр на BC; $KS \perp BC$; $BS = BC$
(медиана = высоте в равнобедр. Δ) $\Rightarrow BS = 2$

$KB = \frac{BS}{\cos 45°} = \frac{2}{\cos 45°} = 2\sqrt{2} = KC \Rightarrow S_{\Delta BKC} = \frac{1}{2}(2\sqrt{2})^2 = 4$

$V_{KBCP} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta BKC} \cdot KP = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 4 = 12$ Ответ: 12.

Комментарий.

Утверждение в пункте *а* не доказано. В решении пункта *б* обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 7.

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах CD и SC отмечены точки N и K соответственно, причём $DN:NC = SK:KC = 1:5$. Плоскость α содержит прямую KN и параллельна прямой SA.

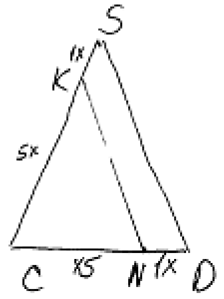
а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой BC.

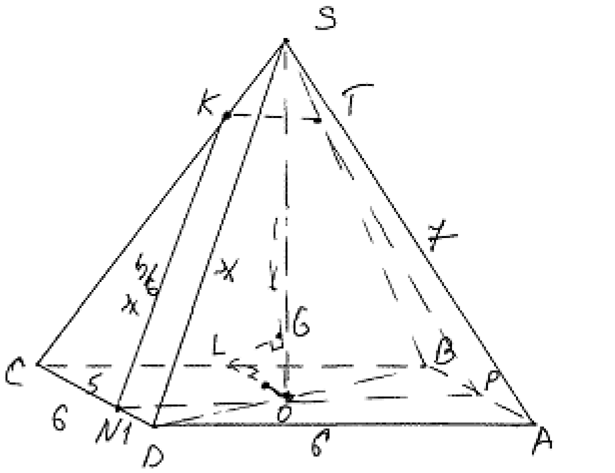
б) Найдите расстояние от точки C до плоскости α.

Ответ: б) $\dfrac{\sqrt{310}}{4}$.

№14.

а)





Δ CNK ∼ CDS

(теорема Фалеса)

⇒ NK ∥ DS ; (~~BSA~~) DS ∈ (DSA) ⇒ NK ∥ (DSA)

Проведём NP ∥ DA. Построим PT ∥ SA

(SA ∈ (DSA) ⇒ (NPT) ∥ (SDA); (NPT) = (α)

⇒ (α) ∥ (SDA) Прямая NP ∥ AD (по построению) DA ∥ CB (т.к SABCD – правильная пирамида) ⇒ NP ∥ CB, т.к NP ∈ (α) ⇒ (α) ∥ CB ч.т.д.

б) Построим LO ⊥ CB; LO ∈ CB. (O – т. пересечение диаг осн пирамиды)

Построим ⊥ LG к (α) LG – расстояние до (α) (теорема о 3-х перпендикулярах) (LG – перпендикуляр; OG – проекция; LO – касательная.

Комментарий.

Утверждение в пункте *а* доказано. В решении есть неточности обозначений длин отрезков на первом чертеже и неоднозначность использования ссылки на теорему Фалеса. Решение пункта *б* не закончено.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 8.

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах CD и SC отмечены точки N и K соответственно, причём $DN:NC = SK:KC = 1:5$. Плоскость α содержит прямую KN и параллельна прямой SA.

а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой BC.

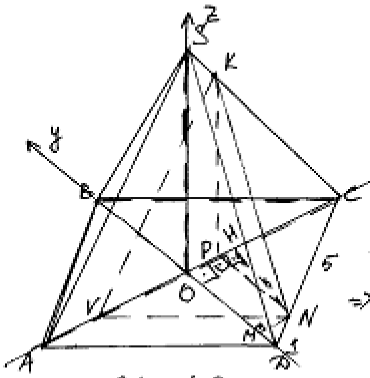
б) Найдите расстояние от точки C до плоскости α.

Ответ: б) $\dfrac{\sqrt{310}}{4}$.

№14

1) SABCD – правильная ~~чет~~ четырехугольная пирамида =>

=> 1. Основание правильный ~~четырех~~ четырехугольник, т.е квадрат 2 ~~Во~~ высота пирамиды проецируется в центр основания, т.е в точку ∩ диагоналей квадрата 3 боковые стороны равны, 4. боковые грани равные р/б ~~Δ~~ треугольники (р/б - равнобедренные)



2) В (ASC). $KV \parallel AS$

Р! ΔASC и ΔCKV.

1 $\angle SCA$ – общий

2 $\angle KVC = \angle SAC$ как соответственные углы, образованные $KV \parallel AS$ и секущей AC } =>

=> $\Delta ASC \sim \Delta CKV$ по 1 признаку =>

=> $\dfrac{CK}{CS} = \dfrac{CV}{AC}$ (из квадрата $AC = a\sqrt{2} = BD = 6\sqrt{2}$ как диагональ)

$CK : KS = 5:1$ по условию => $CK = \dfrac{7\cdot 5}{6}$, $SK = \dfrac{7}{6}$ =>

=> $\dfrac{7\cdot 5}{6\cdot 7} = \dfrac{CV}{6\sqrt{2}}$ => $CV = 5\sqrt{2}$ => $OV = 2\sqrt{2}$ ($CO = 3\sqrt{2} = OB = OD = AO$)

3) ~~(KNV~~ $KV \subset (KNV)$, $KV \parallel AS$, $AS \not\subset (KNV)$ } => $AS \parallel (KNV)$

(KNV) содержит т. K и N и $\parallel AS$ => (KNV) искомая плоскость α

4) В грани ABCD: $NH \perp OC$ и $NM \perp OD$

Р! пр/уг ΔCHN: $\angle HCN = 45°$ тк AC диагональ квадрата =>

=> cos ~~sin~~ $\angle HCN = \dfrac{HC}{NC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ($NC = 5$, $ND = 1$ тк $DN:NC = 1:5$) =>

=> $HC = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ => $OH = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Р! пр/уг ΔNMD: $\angle NDM = 45°$ (BD – диагональ квадрата)

=> $\cos\angle NDM = \dfrac{MD}{DN} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ => $MD = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ => $OM = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

5) В (ASC) $KP \parallel SO$

$SO \perp (ABC)$, $KP \parallel SO$ => $KP \perp (ABC)$; $PC \subset (ABC)$; $KP \perp (ABC)$ => $KP \perp PC$ =>

$\Rightarrow \triangle KPC$ – прямоугольный

$P!$ $\triangle SOC$ и $\triangle KPC$ $KP \parallel SO \Rightarrow$ по теореме о пропорциональных отрезках $\cancel{\frac{CH}{CK}} = \cancel{\frac{HP}{KS}} \Rightarrow \frac{CP}{OP} = \frac{CK}{KS} = \frac{5}{1} \Rightarrow OP = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\cancel{CH+}$

$\Rightarrow CH = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

$CH = CP$, $OH = OP$, $C \in OC$, $O \in OC$, $H \in OC$, $P \in OC \Rightarrow$

$\Rightarrow$ точки H и P совпадают

По т Пифагора из пр/уг $\triangle KPC$: $KP = \frac{5\sqrt{31}}{6}$

6) $V(-2\sqrt{2}; 0; 0)$; $N(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{5\sqrt{2}}{2}; 0)$; $K(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0; \frac{5\sqrt{31}}{6})$

$B(0; 3\sqrt{2}; 0)$ $C(3\sqrt{2}; 0; 0)$

$\vec{BC}\{3\sqrt{2}; -3\sqrt{2}; 0\}$ $\vec{VN}\{\frac{5\sqrt{2}}{2}; -\frac{5\sqrt{2}}{2}; 0\}$

7) $\cos\angle(BC; VN) = |\cos\angle(\vec{BC}; \vec{VN})| = \frac{|\vec{BC}\cdot\vec{VN}|}{|\vec{BC}|\cdot|\vec{VN}|} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle(BC; VN) = 0° \Rightarrow BC \parallel VN$ чтд

8) $Ax + By + Cz + D = 0$

$$\begin{cases} -2\sqrt{2}A + D = 0 \Rightarrow D = 2\sqrt{2}A \\ \frac{\sqrt{2}}{2}A - \frac{5\sqrt{2}}{2}B + D = 0 \Rightarrow A = B \\ \frac{\sqrt{2}}{2}A + \frac{5\sqrt{31}}{6}C + D = 0 \Rightarrow C = -\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{31}} \end{cases}$$

$Ax + Ay - \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{31}}Az + 2\sqrt{2}A = 0$ $/ :A$

$x + y - \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{31}}z + 2\sqrt{2} = 0$ – уравнение пл-ти α

$\rho(C; \alpha) = \frac{|\cancel{1}\cdot 3\sqrt{2} + 0 - 0 + 2\sqrt{2}|}{\sqrt{9\cdot 2}} = \frac{5\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{5}{3}$

Ответ: б) $\frac{5}{3}$

Комментарий.

Утверждение в пункте *а* доказано. В решении пункта *б* есть неточность в решении системы уравнений (выражение *C* через *A*), а при применении формулы расстояния от точки до плоскости неверно найден модуль вектора нормали (не относится к вычислительной ошибке).

Оценка эксперта: 1 балл.

3. Критерии проверки и оценка решений задания 15

Задание №15 – это неравенство – дробно-рациональное, логарифмическое или показательное.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

При этом в первом случае выставления 1 балла допускаются только ошибки в строгости неравенства: «<» вместо «≤», или наоборот. **Если в ответ включено значение переменной, при котором одна из частей неравенства не имеет смысла, то следует выставлять оценку «0 баллов».**

Задача 15 (демонстрационный вариант 2020 г.).

Решите неравенство $\log_{11}\left(8x^2+7\right)-\log_{11}\left(x^2+x+1\right)\geq\log_{11}\left(\frac{x}{x+5}+7\right)$.

Решение. Правая часть неравенства определена при $x<-5$ и $x>-\frac{35}{8}$.

Поскольку при любых значениях x выражение $8x^2+7$ принимает положительные значения, при $x<-5$ и $x>-\frac{35}{8}$ неравенство принимает вид:

$$\frac{8x^2+7}{x^2+x+1}\geq\frac{8x+35}{x+5};\ \frac{8x^3+40x^2+7x+35}{(x+5)\left(x^2+x+1\right)}\geq\frac{8x^3+43x^2+43x+35}{(x+5)\left(x^2+x+1\right)};$$

$$\frac{3x^2+36x}{(x+5)\left(x^2+x+1\right)}\leq 0;\ \frac{3x(x+12)}{(x+5)\left(x^2+x+1\right)}\leq 0,$$

откуда $x\leq-12$; $-5<x\leq 0$. Учитывая ограничения $x<-5$ и $x>-\frac{35}{8}$, получаем: $x\leq-12$; $-\frac{35}{8}<x\leq 0$.

Ответ: $(-\infty;-12]$; $\left(-\frac{35}{8};0\right]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек -12 и/или 0, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задача 1.

Решите неравенство $2^x-6-\dfrac{9\cdot 2^x-37}{4^x-7\cdot 2^x+12}\le\dfrac{1}{2^x-4}$.

Решение.

Пусть $t=2^x$, тогда неравенство примет вид:

$$t-6-\frac{9t-37}{t^2-7t+12}\le\frac{1}{t-4};\ t-6-\frac{9t-37}{(t-3)(t-4)}-\frac{t-3}{(t-3)(t-4)}\le 0;$$

$$t-6-\frac{10}{t-3}\le 0,\text{ где } t\ne 4;\ \frac{(t-1)(t-8)}{t-3}\le 0,\text{ где } t\ne 4,$$

откуда $t\le 1$; $3<t<4$; $4<t\le 8$.

При $t\le 1$ получим: $2^x\le 1$, откуда $x\le 0$.

При $3<t<4$ получим: $3<2^x<4$, откуда $\log_2 3<x<2$.

При $4<t\le 8$ получим: $4<2^x\le 8$, откуда $2<x\le 3$.

Решение исходного неравенства:

$$x\le 0;\ \log_2 3<x<2;\ 2<x\le 3.$$

Ответ: $(-\infty;0]$; $(\log_2 3;2)$; $(2;3]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек 0 и/или 3, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задача 2.

Решите неравенство $\frac{\log_4(64x)}{\log_4 x-3}+\frac{\log_4 x-3}{\log_4(64x)}\ge\frac{\log_4 x^4+16}{\log_4^2 x-9}$.

Решение.

Пусть $t=\log_4 x$, тогда неравенство примет вид:

$$\frac{t+3}{t-3}+\frac{t-3}{t+3}\ge\frac{4t+16}{t^2-9};\ \frac{t^2+6t+9}{(t-3)(t+3)}+\frac{t^2-6t+9}{(t-3)(t+3)}-\frac{4t+16}{(t-3)(t+3)}\ge 0;$$

$$\frac{2t^2-4t+2}{(t-3)(t+3)}\ge 0;\ \frac{2(t-1)^2}{(t-3)(t+3)}\ge 0,\text{ откуда } t<-3;\ t=1;\ t>3.$$

При $t<-3$ получим: $\log_4 x<-3$, откуда $0<x<\frac{1}{64}$.

При $t=1$ получим: $\log_4 x=1$, откуда $x=4$.

При $t>3$ получим: $\log_4 x>3$, откуда $x>64$.

Решение исходного неравенства: $0<x<\frac{1}{64}$; $x=4$; $x>64$.

Ответ: $\left(0;\frac{1}{64}\right)$; 4; $(64;+\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 4, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задача 3.

Решите неравенство $\log_3(5-5x) \geq \log_3(x^2-3x+2) - \log_3(x+4)$.

Решение.

Запишем исходное неравенство в виде:

$$\log_3(5(1-x)) \geq \log_3((2-x)(1-x)) - \log_3(x+4);$$

$$\log_3 5 + \log_3(1-x) \geq \log_3(2-x) + \log_3(1-x) - \log_3(x+4).$$

Неравенство определено при $-4 < x < 1$, поэтому при $-4 < x < 1$ неравенство принимает вид:

$$5 \geq \frac{2-x}{x+4};\ \frac{6x+18}{x+4} \geq 0,$$

откуда $x < -4$; $x \geq -3$. Учитывая ограничение $-4 < x < 1$, получаем: $-3 \leq x < 1$.

Ответ: $[-3;1)$.

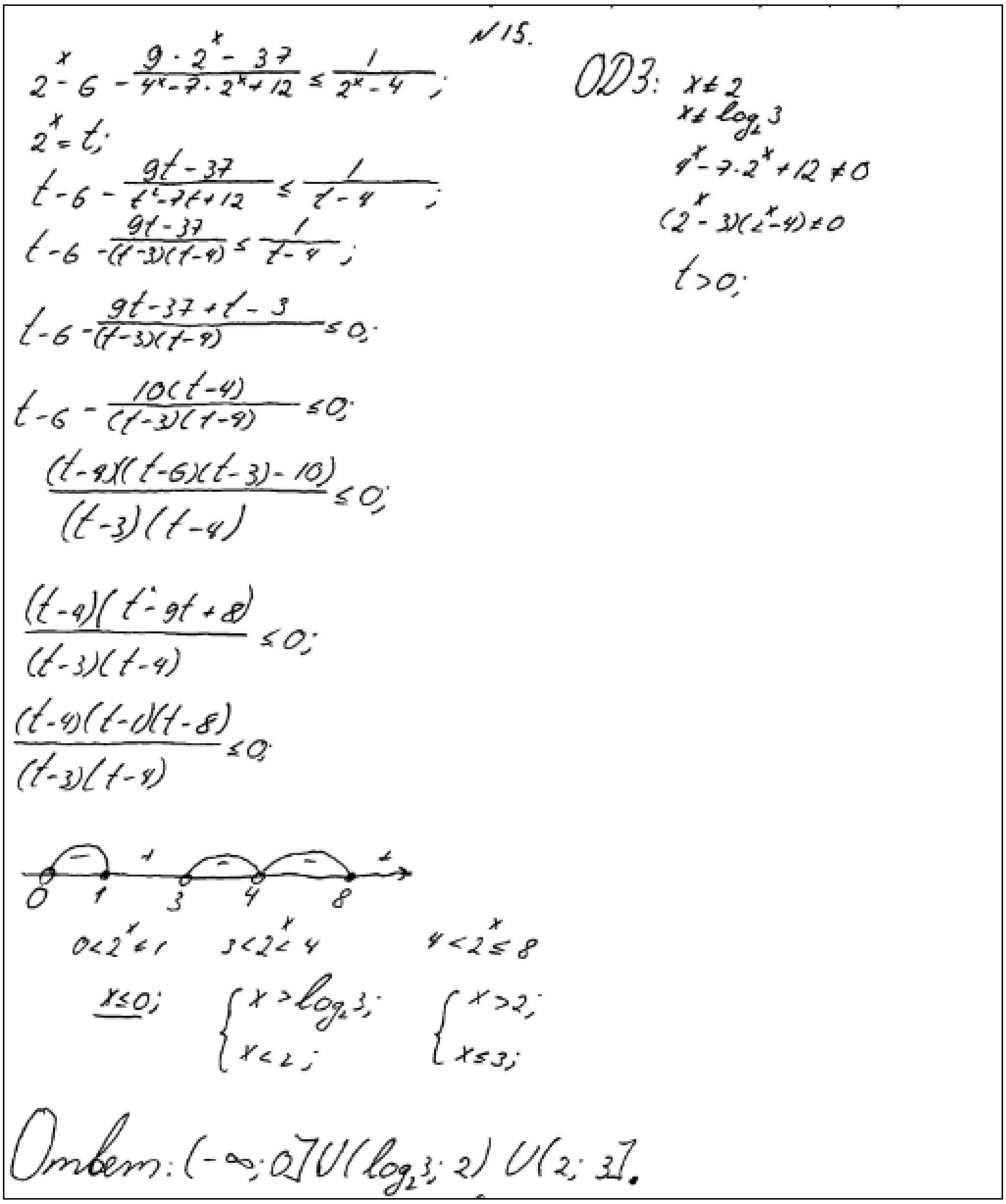
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки -3, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Примеры оценивания решений задания 15

Пример 1.

Решите неравенство $2^x-6-\dfrac{9\cdot 2^x-37}{4^x-7\cdot 2^x+12}\le\dfrac{1}{2^x-4}$.

Ответ: $(-\infty;0]$; $(\log_2 3;2)$; $(2;3]$.



№15.

$2^x-6-\frac{9\cdot 2^x-37}{4^x-7\cdot 2^x+12}\le\frac{1}{2^x-4}$;

ОДЗ: $x\ne 2$
$x\ne\log_2 3$
$4^x-7\cdot 2^x+12\ne 0$
$(2^x-3)(2^x-4)\ne 0$
$t>0$;

$2^x=t$;

$t-6-\frac{9t-37}{t^2-7t+12}\le\frac{1}{t-4}$;

$t-6-\frac{9t-37}{(t-3)(t-4)}\le\frac{1}{t-4}$;

$t-6-\frac{9t-37+t-3}{(t-3)(t-4)}\le 0$;

$t-6-\frac{10(t-4)}{(t-3)(t-4)}\le 0$;

$\frac{(t-4)((t-6)(t-3)-10)}{(t-3)(t-4)}\le 0$;

$\frac{(t-4)(t^2-9t+8)}{(t-3)(t-4)}\le 0$;

$\frac{(t-4)(t-1)(t-8)}{(t-3)(t-4)}\le 0$;

0 1 3 4 8

$0<2^x\le 1$ $\quad 3<2^x<4$ $\quad 4<2^x\le 8$

$x\le 0$; $\quad \begin{cases}x>\log_2 3;\\ x<2;\end{cases}$ $\quad \begin{cases}x>2;\\ x\le 3;\end{cases}$

Ответ: $(-\infty;0]\cup(\log_2 3;2)\cup(2;3]$.

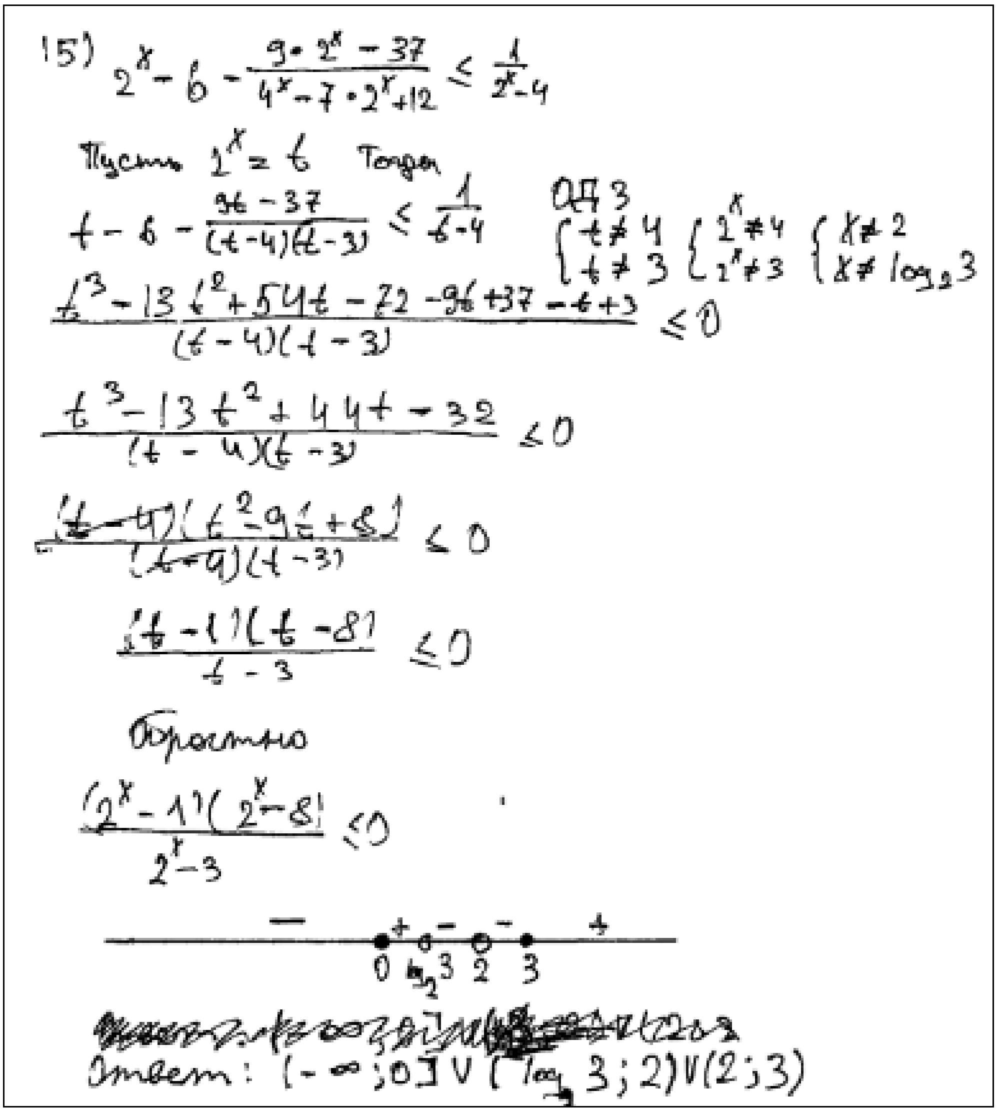
Комментарий.
Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 2.

Решите неравенство $2^x-6-\dfrac{9\cdot 2^x-37}{4^x-7\cdot 2^x+12}\le\dfrac{1}{2^x-4}$.

Ответ: $(-\infty;0]$; $(\log_2 3;2)$; $(2;3]$.


15) $2^x-6-\frac{9\cdot 2^x-37}{4^x-7\cdot 2^x+12}\le\frac{1}{2^x-4}$

Пусть $2^x=t$ Тогда

$t-6-\frac{9t-37}{(t-4)(t-3)}\le\frac{1}{t-4}$ ОДЗ $\begin{cases}t\ne 4\\ t\ne 3\end{cases}$ $\begin{cases}2^x\ne 4\\ 2^x\ne 3\end{cases}$ $\begin{cases}x\ne 2\\ x\ne \log_2 3\end{cases}$

$\frac{t^3-13t^2+54t-72-9t+37-t+3}{(t-4)(t-3)}\le 0$

$\frac{t^3-13t^2+44t-32}{(t-4)(t-3)}\le 0$

$\frac{\cancel{(t-4)}(t^2-9t+8)}{\cancel{(t-4)}(t-3)}\le 0$

$\frac{(t-1)(t-8)}{t-3}\le 0$

Обратно

$\frac{(2^x-1)(2^x-8)}{2^x-3}\le 0$

$-\quad 0 \quad + \quad \log_2 3 \quad - \quad 2 \quad - \quad 3 \quad +$

Ответ: $(-\infty;0]\vee(\log_2 3;2)\vee(2;3)$

Комментарий.

В решение содержится запись «ОДЗ», которая может трактоваться по-разному. Ответ получен неверный, но он отличается от верного только исключением точки 3.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 3.

Решите неравенство $2^x - 6 - \dfrac{9\cdot 2^x - 37}{4^x - 7\cdot 2^x + 12} \le \dfrac{1}{2^x - 4}$.

Ответ: $(-\infty; 0]$; $(\log_2 3; 2)$; $(2; 3]$.

15. $2^x - 6 - \dfrac{9\cdot 2^x - 37}{4^x - 7\cdot 2^x + 12} \le \dfrac{1}{2^x - 4}$

Пусть $2^x = t$, то $t - 6 - \dfrac{9t - 37}{t^2 - 7t + 12} - \dfrac{1}{t-4} \le 0$

$t^2 - 7t + 12 = 0$ $\quad (t-3)(t-4)$

$D = 49 - 4\cdot 12 = 1$ $\quad t - 6 - \dfrac{9t-37}{(t-3)(t-4)} - \dfrac{1}{t-4} \le 0$

$t_1 = \dfrac{7-1}{2} = 3$

$t_2 = \dfrac{7+1}{2} = 4$ $\quad \dfrac{(t^2-7t+12)(t-6) - (9t-37) - (t-3)}{(t-3)(t-4)} \le 0$

$(t-3)(t-4) = t^2 - 7t + 12$

$(t^3 - 7t^2 + 12t - 6t^2 + 42t - 72) - (9t - 37) - (t - 3) \le 0$

$t^3 - 13t^2 + 54t - 72 - 9t + 37 - t + 3 \le 0$

$t^3 - 13t^2 + 44t - 32 \le 0$

Схема Горнера: Пусть $t_1 = 1$, то

$1 - 13 + 44 - 32 = 45 - 45 = 0$ – подходит

	1	−13	44	−32
1	1	−12	32	0

$(t-1)(t^2 - 12t + 32) \le 0$

$t^2 - 12t + 32 = 0$

$D = 144 - 4\cdot 32 = 144 - 128 = 16$

$t_2 = \dfrac{12-4}{2} = 4$ $\quad t_3 = \dfrac{12+4}{2} = 8$

$t_1 = 1$ $\quad t_2 = 4$ $\quad t_3 = 8$

$2^x = 1$ $\quad 2^x = 4$ $\quad 2^x = 8$

$x_1 = 0$ $\quad x_2 = 2$ $\quad x_3 = 3$

$x \in (-\infty; 0] \cup [2; 3]$

Ответ: $(-\infty; 0] \cup [2; 3]$

Комментарий.

При решении неравенства допущена ошибка – допущен неравносильный переход. Это привело к неверному ответу.

Оценка эксперта. 0 баллов.

Пример 4.

Решите неравенство $\dfrac{\log_4(64x)}{\log_4 x-3}+\dfrac{\log_4 x-3}{\log_4(64x)}\ge\dfrac{\log_4 x^4+16}{\log_4^2 x-9}$.

Ответ: $\left(0;\dfrac{1}{64}\right)$; 4; $(64;+\infty)$.

№15.

$$\frac{\log_4(64x)}{\log_4 x-3}+\frac{\log_4 x-3}{\log_4(64x)}\geqslant\frac{\log_4 x^4+16}{\log_4^2 x-9}$$

ОДЗ $\begin{cases} x>0 \\ \log_4 x-3\neq 0 \\ \log_4(64x)\neq 0 \\ \log_4^2 x-9\neq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x>0 \\ \log_4 x\neq 3 \\ 64x\neq 1 \\ (\log_4 x-3)(\log_4 x+3)\neq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x>0 \\ x\neq 64 \\ x\neq \frac{1}{64} \\ \log_4 x\neq -3 \end{cases}$

$\begin{cases} x>0 \\ x\neq 64 \\ x\neq \frac{1}{64} \end{cases}$

$x\in\left(0;\frac{1}{64}\right)\cup\left(\frac{1}{64};64\right)\cup(64;+\infty)$

$$\frac{\log_4 x+3}{\log_4 x-3}+\frac{\log_4 x-3}{\log_4 x+3}\geqslant\frac{4\log_4 x+16}{(\log_4 x-3)(\log_4 x+3)}$$

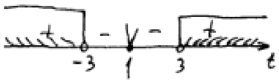
$t=\log_4 x \qquad t\neq\pm 3$

$$\frac{t+3}{t-3}+\frac{t-3}{t+3}\geqslant\frac{4t+16}{(t-3)(t+3)}$$

$$\frac{(t+3)^2+(t-3)^2-4t-16}{(t-3)(t+3)}\geqslant 0$$

$$\frac{t^2+6t+9+t^2-6t+9-4t-16}{(t-3)(t+3)}\geqslant 0$$

$\dfrac{2t^2-4t+2}{(t-3)(t+3)}\geqslant 0 \qquad \dfrac{t^2-2t+1}{(t-3)(t+3)}\geqslant 0 \qquad \dfrac{(t-1)^2}{(t+3)(t-3)}\geqslant 0$



$t\in(-\infty;-3)\cup\{1\}\cup(3;+\infty)\Rightarrow\log_4 x\in(-\infty;-3)\cup\{1\}\cup(3;+\infty)\Rightarrow$

$\Rightarrow x\in\left(0;\frac{1}{64}\right)\cup\{4\}\cup(64;+\infty)$

Ответ: $x\in\left(0;\frac{1}{64}\right)\cup\{4\}\cup(64;+\infty)$

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта. 2 балла.

Пример 5.

Решите неравенство $\dfrac{\log_4(64x)}{\log_4 x-3}+\dfrac{\log_4 x-3}{\log_4(64x)} \geq \dfrac{\log_4 x^4+16}{\log_4^2 x-9}$.

Ответ: $\left(0;\dfrac{1}{64}\right)$; 4; $(64;+\infty)$.

15. $\dfrac{\log_4(64x)}{\log_4 x-3}+\dfrac{\log_4 x-3}{\log_4(64x)} \geq \dfrac{\log_4 x^4-16}{\log_4^2 x-9}$

ОДЗ. $x>0$, $x \in (0;+\infty)$

$\dfrac{\log_4 64+\log_4 x}{\log_4 x-3}+\dfrac{\log_4 x-3}{\log_4 64+\log_4 x}-\dfrac{4\log_4 x-16}{\log_4^2 x-9}\geq 0$

$\dfrac{3+\log_4 x}{\log_4 x-3}+\dfrac{\log_4 x-3}{3+\log_4 x}-\dfrac{4\log_4 x-16}{\log_4^2 x-9}\geq 0$

Пусть $\log_4 x=t$, тогда

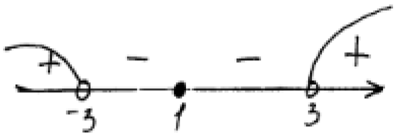
$\dfrac{3+t}{t-3}+\dfrac{t-3}{3+t}-\dfrac{4t-16}{t^2-9}\geq 0$

$\dfrac{(t+3)(t+3)+(t-3)(t-3)}{(t-3)(t+3)}-\dfrac{4t+16}{(t-3)(t+3)}\geq 0$

$\dfrac{t^2+3t+3t+9+t^2-3t-3t+9-4t-16}{(t-3)(t+3)}\geq 0$

$\dfrac{2t^2-4t+2}{(t-3)(t+3)}\geq 0$

$\dfrac{2(t-1)^2}{(t-3)(t+3)}\geq 0$



$\log_4 x<-3$ $\quad$ $\log_4 x=1$ $\quad$ $\log_4 x>3$

$x<\dfrac{1}{64}$ $\quad$ $x=4$ $\quad$ $x>64$

Ответ: $x\in\left(-\infty;\dfrac{1}{64}\right)\cup(4)\cup(64;+\infty)$

Комментарий.

При решении неравенства допущена ошибка при решении простейшего логарифмического неравенства. Ответ получен неверный. В решении содержится ошибочное утверждение, связанное с ОДЗ.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 6.

Решите неравенство $\dfrac{9^x-2\cdot3^{x+1}+4}{3^x-5}+\dfrac{2\cdot3^{x+1}-51}{3^x-9}\le 3^x+5$.

Ответ: $(-\infty;1]$; $(\log_3 5;2)$.

$$\frac{9^x-2\cdot3^{x+1}+4}{3^x-5}+\frac{2\cdot3^{x+1}-51}{3^x-9}\le 3^x+5$$

$$\frac{(3^{2x}-2\cdot3\cdot3^x+4)(3^x-9)+(2\cdot3\cdot3^x-51)(3^x-5)-(3^x-5)(3^x+5)(3^x-9)}{(3^x-5)(3^x-9)}\le 0$$

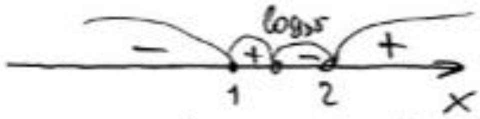
$$\frac{3^{3x}-6\cdot3^{2x}+4\cdot3^x-9\cdot3^{2x}+54\cdot3^x-36+6\cdot3^{2x}-51\cdot3^x-30\cdot3^x+255-(3^{2x}-25)(3^x-9)}{(3^x-3^{\log_3 5})(3^x-3^2)}\le 0$$

знаки $(3^x-3^{\log_3 5})$ и (3^x-3^2) совпадает со знаками $(x-\log_3 5)$ и $(x-2)$ соответственно

$$\frac{\cancel{3^{3x}}-9\cdot3^{2x}-23\cdot3^x+219-\cancel{3^{3x}}+\cancel{9\cdot3^{2x}}+25\cdot3^x-225}{(x-\log_3 5)(x-2)}\le 0$$

$\dfrac{2\cdot3^x-6}{(x-\log_3 5)(x-2)}\le 0\,\Big|:2;\quad \dfrac{3^x-3^1}{(x-\log_3 5)(x-2)}\le 0$ знак (3^x-3^1) совпадает со знаком $(x-1)$

$\dfrac{x-1}{(x-\log_3 5)(x-2)}\le 0$



$1<\log_3 5<2$ $\Rightarrow x\in\{-\infty;1]\cup(\log_3 5;2)$

Ответ: $\{-\infty;1]\cup(\log_3 5;2)$

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ. Левая круглая скобка в ответе может быть прочитана как фигурная, но это не является основанием для того, чтобы считать ответ неверным.

Оценка эксперта. 2 балла.

Пример 7.

Решите неравенство $\dfrac{9^x-2\cdot3^{x+1}+4}{3^x-5}+\dfrac{2\cdot3^{x+1}-51}{3^x-9}\le 3^x+5$.

Ответ: $(-\infty;1]$; $(\log_3 5;2)$.

$$\frac{9^x-2\cdot3^{x+1}+4}{3^x-5}+\frac{2\cdot3^{x+1}-51}{3^x-9}\le 3^x+5$$

$3^x-9>0$
$3^x=9$
$x>2$

$3^x-5>0$
$3^x=5$
$x>\log_3 5$

$$\frac{3^{2x}-2\cdot3^x\cdot3+4}{3^x-5}+\frac{2\cdot3^x\cdot3-51}{3^x-9}\le 3^x+5$$

Пусть $3^x=t$

$$\frac{t^2-6t+4}{t-5}+\frac{6t-51}{t-9}\le t+5$$

$$\frac{(t^2-6t+4)\cdot(t-9)+(6t-51)(t-5)}{(t-5)(t-9)}\le(t+5)(t-5)(t-9)$$

$$t^3-6t^2+4t-9t^2+54t-36+6t^2-30t-51t+255\le t^3-25t-9t^2+225$$

$$\cancel{t^3}-\cancel{6t^2}+4t-\cancel{9t^2}+54t-36+\cancel{6t^2}-30t-51t+255-\cancel{t^3}+25t+\cancel{9t^2}-225\le0$$

$2t-6=0$
$2t=6$
$t=3$

$3^x=3$
$x=1$
$x\le1$

Ответ: $(-\infty;1]\cup(\log_3 5;2)$

Комментарий.

В решении допущены ошибочные утверждения, присутствует неравносильный переход при решении неравенств, получен ответ (совпадающий с верным).

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 8.

Решите неравенство $\dfrac{9^x-2\cdot 3^{x+1}+4}{3^x-5}+\dfrac{2\cdot 3^{x+1}-51}{3^x-9}\le 3^x+5$.

Ответ: $(-\infty;1]$; $(\log_3 5;2)$.

$$\frac{9^x-2\cdot 3^{x+1}+4}{3^x-5}+\frac{2\cdot 3^{x+1}-51}{3^x-9}\le 3^x+5$$

ОДЗ:
$3^x-5\ne 0$
$3^x\ne 5$
$x\ne \log_3 5$
$3^x-9\ne 0$
$3^x\ne 9$
$x\ne 2$

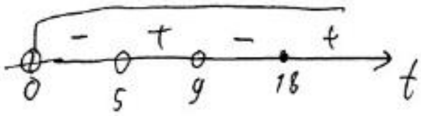
$$\frac{9^x-2\cdot 3\cdot 3^x+4}{3^x-5}+\frac{2\cdot 3\cdot 3^x-51}{3^x-9}\le 3^x+5$$

$3^x=t;\ t>0$

$$\frac{t^2-6t+4}{t-5}+\frac{6t-51}{t-9}-t-5\le 0$$

$$\frac{(t^2-6t+4)(t-9)+(6t-51)(t-5)-(t+5)(t-5)(t-9)}{(t-5)(t-9)}\le 0$$

$$\frac{2(t-18)}{(t-5)(t-9)}\le 0$$



$t\in(0;5)\cup(9;18]$

$3^x\in(0;5)\cup(9;18]$

$x\in(-\infty;\log_3 5)\cup(2;\log_3 18]$

$\boxed{\text{Ответ: } x\in(-\infty;\log_3 5)\cup(2;\log_3 18]}$

Комментарий.

Ответ неверный. При преобразовании числителя допущена вычислительная ошибка, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 9.

Решите неравенство $\log_3(5-5x) \geq \log_3\left(x^2-3x+2\right)-\log_3(x+4)$.

Ответ: $[-3;1)$.

№15. $\log_3(5-5x) \geq \log_3(x^2-3x+2) - \log_3(x+4)$

ОДЗ:

$5(1-x)>0$

$x^2-3x+2>0 \Rightarrow (x-2)(x-1)>0$

$x>-4$

$\log_3(5-5x) \geq \log_3\frac{x^2-3x+2}{x+4}$

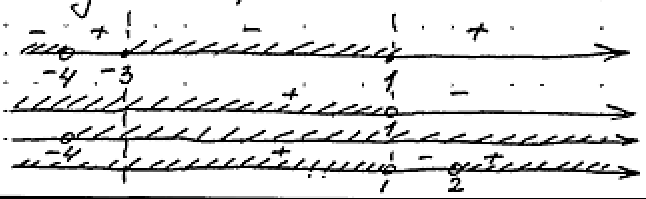
$3>1 \Rightarrow$ функция монотонно возрастает $\Rightarrow$

$\Rightarrow 5-5x \geq \frac{x^2-3x+2}{x+4} \Rightarrow \frac{(5-5x)(x+4)-x^2+3x-2}{x+4} \geq 0$

$\frac{5x+20-5x^2-20x-x^2+3x-2}{x+4} \geq 0$

$\frac{-6x^2-12x+18}{x+4} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2+2x-3}{x+4} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x+3)(x-1)}{x+4} \leq 0$

~~метод интервалов~~



$\Rightarrow x \in [-3;1)$

Ответ: $[-3;1)$

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 10.

Решите неравенство $\log_3(5-5x) \geq \log_3\left(x^2-3x+2\right)-\log_3(x+4)$.

Ответ: $[-3;1)$.

w 15.

$\log_3(5-5x) \geqslant \log_3(x^2-3x+2)-\log_3(x+4)$

ОДЗ. $\begin{cases} 5-5x>0 \\ x^2-3x+2>0 \\ x+4>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1 \\ x<1;\ x>2 \\ x>-4. \end{cases}$

$\Rightarrow x \in (-4;1);\ (2;+\infty)$

$\log_3(5-5x)+\log_3(x+4) \geqslant \log_3(x^2-3x+2)$

$\log_3(5-5x)\cdot(x+4) \geqslant \log_3(x^2-3x+2)$

$\log_3$ – монотонно возрастающая функция $\Rightarrow$ знак неравенства не меняем.

$(5-5x)\cdot(x+4) \geqslant x^2-3x+2$

$-6x^2-12x+18 \geqslant 0 \quad |:-6$

$x^2+2x-3 \leqslant 0 \Rightarrow (x-1)(x+3) \leqslant 0$

$\begin{cases} x \in [-3;1]. \\ x \in (-4;1);\ (2;+\infty) \end{cases} \Rightarrow x \in [-3;1)$

Ответ: $[-3;1)$

Комментарий.

Система неравенств решена неверно (не вычислительная ошибка).

Оценка эксперта: 0 баллов.

4. Критерии проверки и оценка решений задания 16

Задание №16 – это планиметрическая задача. В пункте *а* теперь нужно **доказать** геометрический факт, в пункте *б* – найти (вычислить) геометрическую величину.

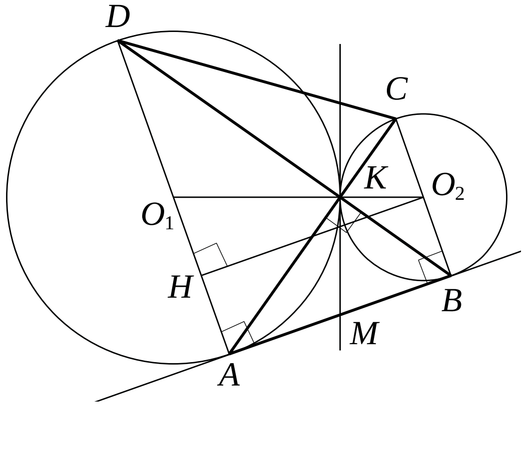
Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Задача 16 (демонстрационный вариант 2020 г.).

Две окружности касаются внешним образом в точке K. Прямая AB касается первой окружности в точке A, а второй — в точке B. Прямая BK пересекает первую окружность в точке D, прямая AK пересекает вторую окружность в точке C.

а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника AKB, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.



Решение. а) Обозначим центры окружностей O_1 и O_2 соответственно. Пусть общая касательная, проведённая к окружностям в точке K, пересекает AB в точке M. По свойству касательных, проведённых из одной точки, $AM = KM$ и $KM = BM$. Треугольник AKB, у которого медиана равна половине стороны,

к которой она проведена, прямоугольный.
Вписанный угол AKD прямой, поэтому он опирается на диаметр AD. Значит, $AD \perp AB$. Аналогично, получаем, что $BC \perp AB$. Следовательно, прямые AD и BC параллельны.
б) Пусть, для определённости, первая окружность имеет радиус 4, а вторая — радиус 1.
Треугольники BKC и AKD подобны, $\frac{AD}{BC} = 4$. Пусть $S_{BKC} = S$, тогда
$$S_{AKD} = 16S.$$
У треугольников AKD и AKB общая высота, следовательно, $\frac{S_{AKD}}{S_{AKB}} = \frac{DK}{KB} = \frac{AD}{BC}$, то есть $S_{AKB} = 4S$. Аналогично, $S_{CKD} = 4S$. Площадь трапеции $ABCD$ равна $25S$.
Вычислим площадь трапеции $ABCD$. Проведём к AD перпендикуляр O_2H, равный высоте трапеции, и найдём его из прямоугольного треугольника O_2HO_1:
$$O_2H = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1H^2} = 4.$$
Тогда
$$S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot AB = 20.$$
Следовательно, $25S = 20$, откуда $S = 0{,}8$ и $S_{AKB} = 4S = 3{,}2$.
Ответ: 3,2.

Задача 1.

В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH. На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.
а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.
б) Найдите отношение BH к ED, если $\angle BCD = 120°$.

Решение.
а) Поскольку

$$\angle ABC = \angle AHC = \angle ECD = \angle EAD = 90°,$$

около четырёхугольников $ABCH$ и $AECD$ можно описать окружности (рис. 1).

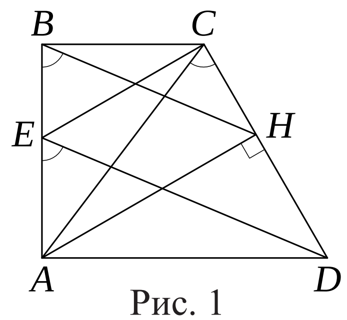


Рис. 1

Значит,

$$\angle ABH = \angle ACH = \angle ACD = \angle AED,$$

то есть прямые BH и ED параллельны.
б) Опустим из точки B перпендикуляр BK на прямую CD (рис. 2). Стороны KH и CD треугольников BKH и ECD лежат на одной прямой, а стороны BK и EC, BH и ED попарно параллельны. Значит, треугольники BKH и ECD подобны.

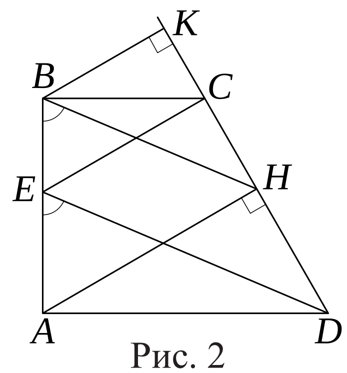


Рис. 2

Поскольку

$$BK = BC \cdot \sin\angle BCK = EC \cdot \cos\angle ECB \cdot \sin\angle BCK =$$

$$= EC \cdot \cos 30° \cdot \sin 60° = \frac{3}{4} EC,$$

коэффициент подобия равен $\frac{3}{4}$. Значит,

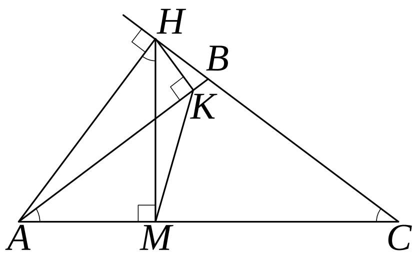
$$BH : ED = 3:4.$$

Ответ: б) $3:4$.

Задача 2.

В равнобедренном тупоугольном треугольнике ABC на продолжение боковой стороны BC опущена высота AH. Из точки H на сторону AB и основание AC опущены перпендикуляры HK и HM соответственно.
а) Докажите, что отрезки AM и MK равны.
б) Найдите MK, если $AB = 5$, $AC = 8$.

Решение.



а) Поскольку $\angle AMH = \angle AKH = 90°$, около четырёхугольника $AMKH$ можно описать окружность с диаметром AH. Получаем:

$$\angle BAC = \angle BCA = 90° - \angle HAC = \angle AHM,$$

поэтому $AM = MK$ как хорды, стягивающие равные дуги.
б) В прямоугольных треугольниках AHM и ACH имеем:

$$AM = AH \cdot \cos\angle HAM = AC \cdot \cos^2\angle HAM = AC \cdot \left(1 - \cos^2\angle ACB\right).$$

Поскольку $\cos\angle ACB = \frac{AC}{2BC} = \frac{4}{5}$, получаем:

$$MK = AM = \frac{72}{25}.$$

Ответ: б) $\frac{72}{25}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

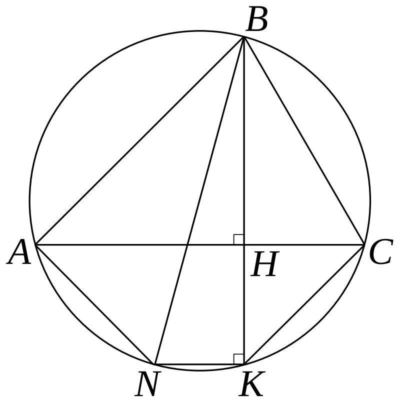
Задача 3.

В остроугольном треугольнике ABC все стороны различны. Прямая, содержащая высоту BH треугольника ABC, вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке K. Отрезок BN — диаметр этой окружности.

а) Докажите, что $AN = CK$.

б) Найдите NK, если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен 16, $\angle BAC = 40°$, $\angle ACB = 85°$.

Решение.



а) Поскольку BN — диаметр описанной около треугольника ABC окружности, получаем

$$\angle ABN = 90° - \angle ANB = 90° - \angle ACB = $$
$$= 90° - \angle HCB = \angle CBH = \angle CBK.$$

Следовательно, хорды AN и CK стягивают равные дуги, а значит, они равны.

б) Пусть $R = 16$ — радиус окружности, описанной около треугольника ABC. Имеем:

$$\angle ABN = \angle CBH = 90° - \angle HCB = 5°,$$
$$\angle ABC = 180° - \angle BAC - \angle ACB = 55°;$$
$$\angle KBN = \angle ABC - \angle ABN - \angle CBK = 45°.$$

Следовательно, по теореме синусов

$$NK = 2R \cdot \sin \angle KBN = 2R \cdot \sin 45° = 16\sqrt{2}.$$

Ответ: б) $16\sqrt{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Примеры оценивания решений задания 16

Пример 1.

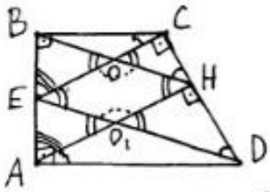
В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH. На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.
а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.
б) Найдите отношение BH к ED, если $\angle BCD = 120°$.

Ответ: б) $3:4$.

№16.

Дано:
$ABCD$ – трапеция
$BC \perp AB \perp AD$
$AH \perp CD$
$CE \perp CD$

а) Доказать:
$BH \parallel ED$



Доказательство:
1) т.к. $AH \perp CD$ и $CE \perp CD$, то $AH \parallel CE$;
2) AB – секущая при двух $\parallel$ прямых, значит $\angle BEC = \angle BAH$; 3) BH – тоже секущая, значит $\angle BOE = \angle COH = \angle BHA$;
4) ED – тоже секущая, значит $\angle CED = \angle EO_1A = \angle HO_1D$;
5) $\angle EOH = 180° - \angle COH$ (смеж. углы), $\angle EO_1H = 180° - \angle BHA$. т.к. $\angle COH = \angle BHA$, то $\angle EOH = \angle EO_1H$, следовательно, $EOHO_1$ – параллелограм, а его противолежащие стороны = и $\parallel$, значит, $BH \parallel ED$.

Комментарий.
Имеется попытка доказательства утверждения пункта *а*. Логическая ошибка содержится в записи 5) – при вычислении угла EO_1H: $\angle EO_1H = 180° - \angle EO_1A$. Замена угла $\angle EO_1A$ углом $\angle BHA$ возможна только при условии параллельности прямых BH и ED, а как раз это и требовалось доказать.

Оценка эксперта: 0 баллов.

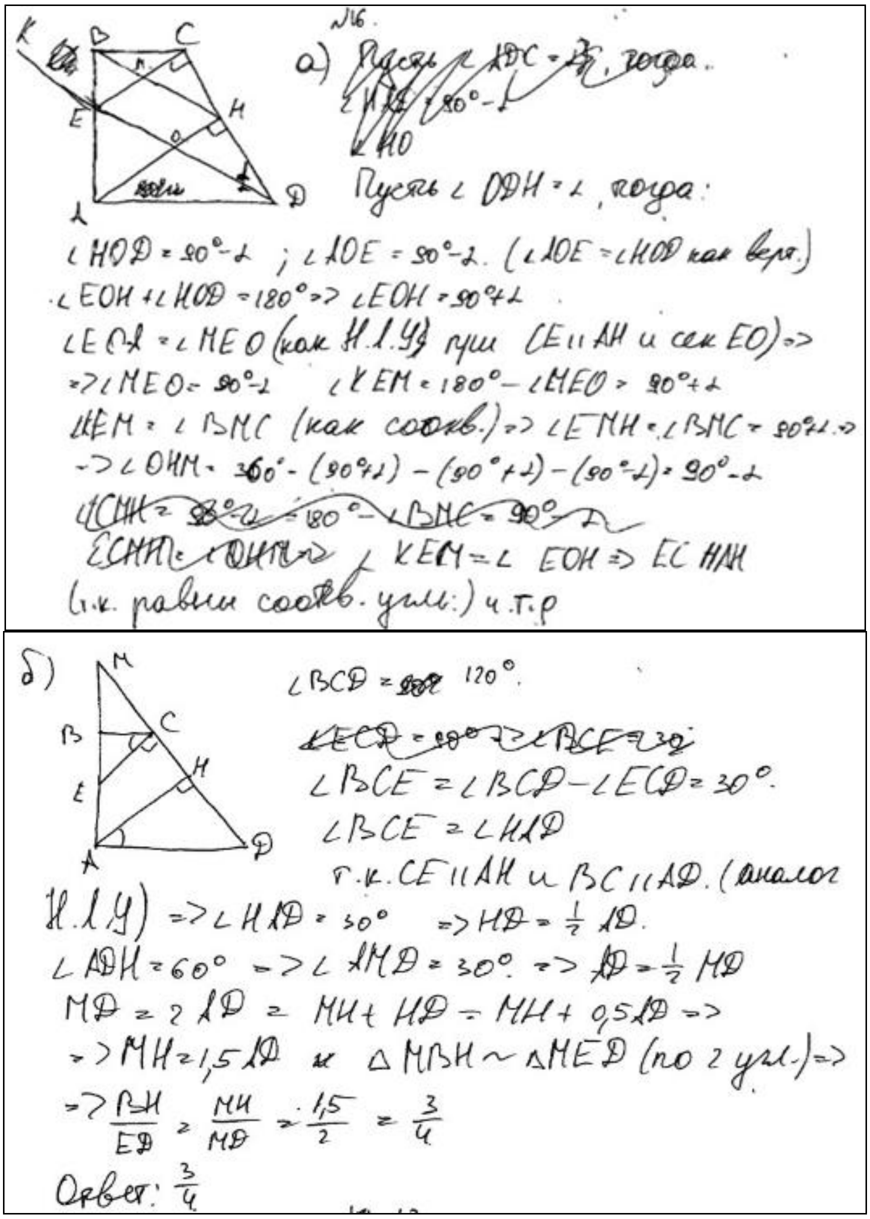
Пример 2.

В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH. На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.

а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.

б) Найдите отношение BH к ED, если $\angle BCD = 120°$.

Ответ: б) $3:4$.



№16.

а) ~~Пусть ∠ADC = α, тогда ∠HAD = 90° − α, ∠HO~~

Пусть $\angle ODH = \alpha$, тогда:

$\angle HOD = 90° - \alpha$; $\angle AOE = 90° - \alpha$. ($\angle AOE = \angle HOD$ как верт.)

$\angle EOH + \angle HOD = 180° \Rightarrow \angle EOH = 90° + \alpha$

$\angle ECA = \angle MEO$ (как Н.Л.У.) при $CE \parallel AH$ и сек EO) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle MEO = 90° - \alpha$ $\quad \angle KEM = 180° - \angle MEO = 90° + \alpha$

$\angle KEM = \angle BMC$ (как соотв.) $\Rightarrow \angle EMH = \angle BMC = 90° + \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle OHM = 360° - (90°+\alpha) - (90°+\alpha) - (90°-\alpha) = 90° - \alpha$

~~∠CMH = 90° − α = 180° − ∠BMC = 90° − α~~

$\angle CMH = \angle OHM \Rightarrow \angle KEM = \angle EOH \Rightarrow EC \parallel AH$

(т.к. равны соотв. углы) ч.т.д.

б) $\angle BCD = 120°$.

~~∠ECD = 90° => ∠BCE = 30°~~

$\angle BCE = \angle BCD - \angle ECD = 30°$.

$\angle BCE = \angle HAD$

т.к. $CE \parallel AH$ и $BC \parallel AD$. (аналог Н.Л.У) $\Rightarrow \angle HAD = 30° \Rightarrow HD = \frac{1}{2} AD$.

$\angle ADH = 60° \Rightarrow \angle AMD = 30° \Rightarrow AD = \frac{1}{2} MD$

$MD = 2AD = MH + HD = MH + 0{,}5AD \Rightarrow$

$\Rightarrow MH = 1{,}5AD$ и $\Delta MBH \sim \Delta MED$ (по 2 угл.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{BH}{ED} = \frac{MH}{MD} = \frac{1{,}5}{2} = \frac{3}{4}$

Ответ: $\frac{3}{4}$

Комментарий.

В данном решении есть попытка доказательства утверждения пункта *а*. Логическая ошибка содержится в записи $\angle KEM = \angle BMC$ – это возможно только при параллельности прямых BH и ED, а как раз это и требовалось доказать. Верный ответ в пункте *б* получен обоснованно с использованием недоказанного утверждения пункта *а*.

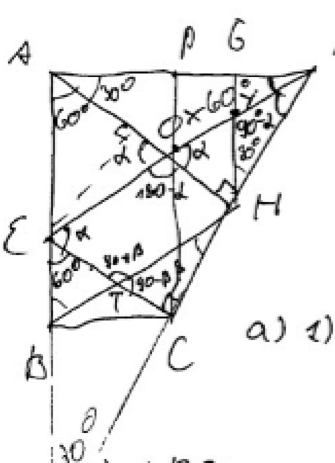
Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 3.

В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH. На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.
а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.
б) Найдите отношение BH к ED, если $\angle BCD = 120°$.

Ответ: б) $3:4$.

№16.



Дано: $AH \perp CD$ $\angle BCD = 120°$
$CE \perp CD$ и $CE \cap AB = E$
а) Д-ть: $BH \parallel ED$
б) $\frac{BH}{ED}$ – ?

а) 1) $\left.\begin{array}{l} AH \perp CD \\ CE \perp CD \end{array}\right\} \Rightarrow$ накр. леж. прямых $AH \parallel EC$
2) $\angle DEC = \angle DOH = \alpha$ как соотв.
~~3) $\angle ODH = 90° - \alpha$~~
4) Пусть $AB = x$ $AH = y$ ~~5) $\triangle BET$~~ ~~...~~

5) $\triangle BET \sim \triangle BAH$ по 2-м углам ($\angle ABH$ – общий, $\angle BET = \angle BAH$ как соотв.) k – коэффициент подобия
6) $AE = AB - BE = AB - kAB = x(1-k)$
$AO = AH - OH = AH - kAH = y(1-k)$
7) $\triangle AEO \sim \triangle ABH$ по углу и 2-м сторонам ($\angle A$ – общий; $\frac{AO}{AH} = 1-k$ и $\frac{AE}{AB} = 1-k$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle AED = \angle ABH$
8) т. к. $\angle AEO = \angle ABH$, то по признаку параллельности прямых (прямые парал., если соотв. углы равны) $ED \parallel BH$ ч. т. д.

Комментарий.
Логическая ошибка: доказательство утверждения пункта *а* опирается на дополнительное условие из пункта *б*.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 4.

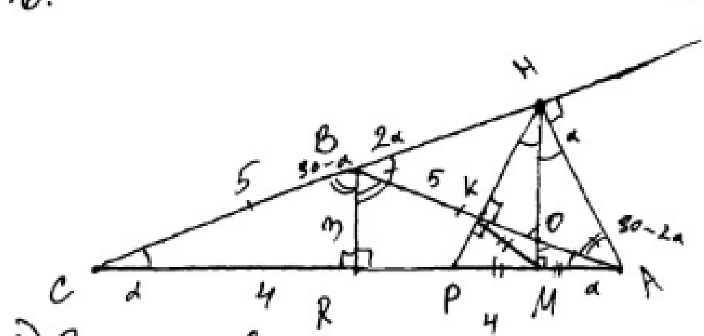
В равнобедренном тупоугольном треугольнике ABC на продолжение боковой стороны BC опущена высота AH. Из точки H на сторону AB и основание AC опущены перпендикуляры HK и HM соответственно.

а) Докажите, что отрезки AM и MK равны.

б) Найдите MK, если $AB = 5,\ AC = 8$.

Ответ: б) $\frac{72}{25}$.

16.



Дано:
$\angle ABC > 90°$ $AB = 5$
$AB = BC$ $AC = 8$
$AH \perp BC$
$HK \perp AB$
$HM \perp AC$

Доказать:
а) $AM = MK$ − ?
Найти: б) MK − ?

а) Доказательство:

Пусть $\angle BCA = \alpha$.
Т.к. $\triangle ABC$ − равнобедренный, то и $\angle BAC = \alpha$.

$\angle CBA = 180 - 2\alpha$
Пусть $BR \perp AC$, тогда $CR = RA$,
$\angle CBR = \angle RBA = \frac{\angle CBA}{2} = \frac{180-2\alpha}{2} = 90 - \alpha$.

$\angle ABH = 180° - \angle CBA = 180° - (180 - 2\alpha) = 2\alpha$
Т.к. $\triangle BAH$ − прямоугольный ($AH \perp BC$), то $\angle BAH = 90 - 2\alpha$.

$\angle KHA = 180 - 90 - (90 - 2\alpha) = 2\alpha$.

$\triangle BHA \sim \triangle KHA$ по трём углам.

Пусть $AB \cap HM = O$.

$\angle AOM = 180 - 90 - \alpha = 90 - \alpha$.
$\angle AOM = \angle KOH$ как вертикальные углы.

$\angle KHO = 180 - 90 - (90 - \alpha) = \alpha$.

$\angle KHO = \alpha$, $\angle KHA = 2\alpha$, тогда $\angle OHA = \alpha$.
Пусть $HK \cap AC = P$, тогда $\triangle AHP$ − равнобедренный, т.к. $HM \perp AP$, $\angle KHO = \angle OHA$.

$\angle HPA = \angle MAH = 90 - 2\alpha + \alpha = 90 - \alpha$.
$PM = MA$, т.к. HM − высота, медиана, биссектриса равнобедренного $\triangle AHP$.

$\triangle PKA$ − прямоугольный, т.к. $HK \perp AB$.
Около $\triangle PKA$ можно описать окружность, и из-за того, что $\triangle PKA$ − прямоугольный, её центр будет лежать в середине гипотенузы − точке M. AP будет её диаметром, PM, AM и MK − радиусами.
Получается, что $PM = AM = MK$, что и требовалось доказать.

б) Т.к. $BR \perp AC$ и $\triangle ABC$ − равнобедр., то $CR = RA = \frac{AC}{2} = \frac{8}{2} = 4$.

По теореме Пифагора:
$BR^2 = AB^2 - AR^2$
$BR^2 = 25 - 16 = 9$
$BR = \sqrt{9} = 3$.
$\triangle BRA$ подобен $\triangle KPA$ по трём углам ($\angle BRA = \angle AKP = 90°$; $\angle RBA = \angle APK = 90 - \alpha$; $\angle PAK = \angle RAB = \alpha$;)

$\triangle KPA$, в свою очередь, подобен $\triangle AOM$ по трём углам ($\angle AMO = \angle AKP = 90$; $\angle PAK = \angle MAO = \alpha$; $\angle AOM = \angle APK = 90 - \alpha$), сходственные стороны этих треугольников пропорциональны:

$$\frac{AO}{AP} = \frac{AM}{AK} = \frac{OM}{KP}$$

, и так как $PM = AM$, $AP = 2AM$, коэффициент подобия $\triangle KPA$ и $\triangle AOM$ равен 2.

$$\cos\alpha = \frac{AR}{AB} = \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

Рассмотрим $\triangle PKM$, он – равнобедренный ($PM = KM$), тогда $\angle KPM = \angle PKM = 90 - \alpha$.

Тогда $\angle PMK = 180 - 2(90 - \alpha) = 2\alpha$.

$$\cos\angle KPM = \cos(90 - \alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha.$$

$$\sin\alpha = \frac{BR}{AR} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

Пусть $PM = AM = MK = x$

По теореме косинусов для $\triangle PKM$:

$$PK^2 = PM^2 + MK^2 - 2\cdot PM\cdot MK\cdot\cos\angle KPM$$

$$PK^2 = 2x^2 - 2x^2\cdot\sin\alpha$$

$$PK^2 = 2x^2 - 1{,}2x^2 = 0{,}8x^2$$

$$PK = \sqrt{\frac{8}{10}x^2} = \frac{2x\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = 2x\sqrt{\frac{1}{5}} = \cancel{\frac{2x\sqrt{5}}{\sqrt{5}}} = \frac{2x\sqrt{5}}{5}$$

По теореме Пифагора для $\triangle APK$:

$$AK^2 = AP^2 - PK^2$$

$$AK^2 = 4x^2 - 0{,}8x^2 = 3{,}2x^2$$

$$AK = x\sqrt{\frac{32}{10}} = 4x\sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{4x\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{AK}{PK} = \frac{\frac{4x\sqrt{5}}{5}}{\frac{2x\sqrt{5}}{5}} = 2,$$

$BK = 5 - AK$

По теореме Пифагора для $\triangle BKP$:

$$BP^2 = BK^2 + KP^2$$

$$16 - 16x + 4x^2 = BK^2 + KP^2$$

$$16 - 16x + 4x^2 = \frac{20x^2}{25} + \left(5 - \left(4x^2 + \frac{20x^2}{25}\right)\right)$$

$$16 - 16x + 4x^2 = \frac{20x^2}{25} + 5 - \frac{80x^2}{25}$$

$$16 - 16x + 4x^2 = \frac{125 - 60x^2}{25}$$

$$16 - 16x + 4x^2 = \frac{25 - 12x^2}{5}$$

$$80 - 80x + 20x^2 = 25 - 12x^2$$

$$8x^2 - 80x + 65 = 0.$$

$$D = 6400 - 2080 = 4320$$

$$\sqrt{4320} = 12\sqrt{30}$$

$$x = \frac{12\sqrt{30} + 80}{16} = \frac{3\sqrt{30}}{4} + 5 =$$

$$= \frac{3\sqrt{30} + 20}{4} = MK;$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{30} + 20}{4}$;

Комментарий.

Доказательство утверждения пункта *а* верно. Правда, следует отметить, что в доказательстве получено много верных утверждений, которые не нужны для доказательства равенства отрезков AM и MK, кроме того некорректно формулируется признак подобия треугольников.

В решении пункта *б* допущена ошибка при вычислении длины отрезка PK – вместо $\cos\angle KPM$ должно быть $\cos\angle KMP$.

Оценка эксперта: 1 балл.

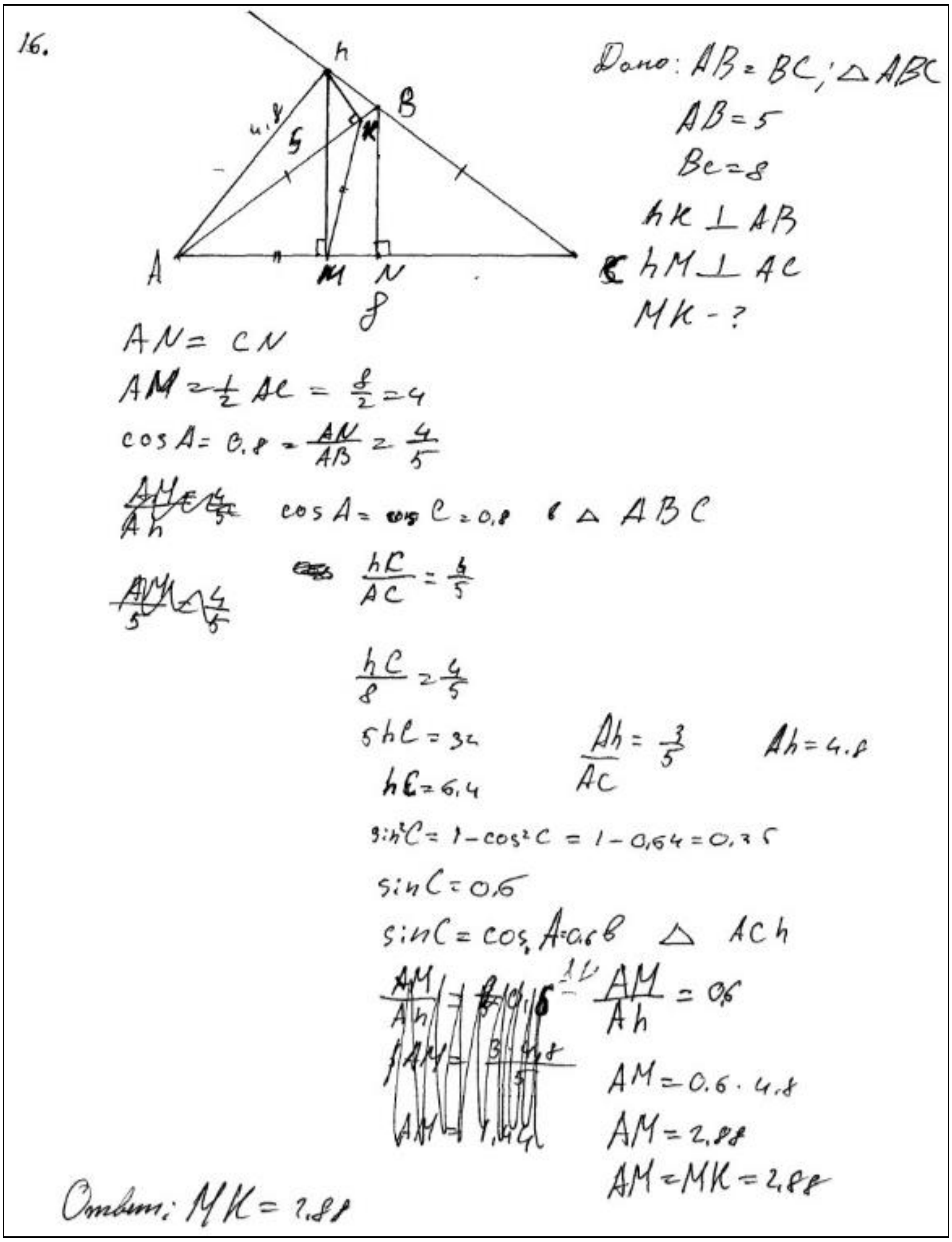
Пример 5.

В равнобедренном тупоугольном треугольнике ABC на продолжение боковой стороны BC опущена высота AH. Из точки H на сторону AB и основание AC опущены перпендикуляры HK и HM соответственно.

а) Докажите, что отрезки AM и MK равны.

б) Найдите MK, если $AB = 5$, $AC = 8$.

Ответ: б) $\frac{72}{25}$.



16.

Дано: $AB = BC$; $\triangle ABC$

$AB = 5$

$Bc = 8$

$hK \perp AB$

$hM \perp AC$

$MK - ?$

$AN = CN$

$AM = \frac{1}{2} AC = \frac{8}{2} = 4$

$\cos A = 0{,}8 = \frac{AN}{AB} = \frac{4}{5}$

$\cancel{\frac{AM}{Ah} = \frac{4}{5}}$ $\cos A = \cos C = 0{,}8$ в $\triangle ABC$

$\frac{hC}{AC} = \frac{4}{5}$

$\frac{hC}{8} = \frac{4}{5}$

$5hC = 32$ $\frac{Ah}{AC} = \frac{3}{5}$ $Ah = 4.8$

$hC = 6.4$

$\sin^2 C = 1 - \cos^2 C = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$

$\sin C = 0{,}6$

$\sin C = \cos A = 0{,}6$ $\triangle ACh$

$\frac{AM}{Ah} = 0{,}6$

$AM = 0.6 \cdot 4.8$

$AM = 2{,}88$

$AM = MK = 2{,}88$

Ответ: $MK = 2{,}88$

Комментарий.

Доказательство утверждения пункта *а* отсутствует. Решение пункта *б* выполнено верно с использованием недоказанного утверждения пункта *а*.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 6.

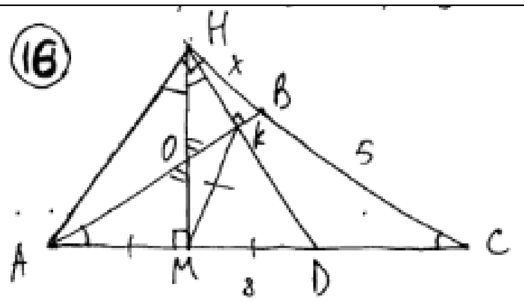
В равнобедренном тупоугольном треугольнике ABC на продолжение боковой стороны BC опущена высота AH. Из точки H на сторону AB и основание AC опущены перпендикуляры HK и HM соответственно.

а) Докажите, что отрезки AM и MK равны.

б) Найдите MK, если $AB = 5$, $AC = 8$.

Ответ: б) $\frac{72}{25}$.

16



а) ΔABC: р/б $\Rightarrow \angle BAC = \angle BCA$ (1)
ΔAHC: прямоуг. KM высота $\Rightarrow$
$\Delta ACK \sim \Delta AKM \Rightarrow \angle ACB = \angle AHM$ (2)
$\Delta AOM \sim \Delta OHK$ (уу) $\Rightarrow \angle OAM = \angle OHB$ (3)
(1), (2), (3) $\Rightarrow$ OK – бисс в ΔAKB.
продолжим прямую HK до стороны AC. ΔAHD:
HM – выс и бисс $\Rightarrow \Delta AHD$ – р/б $\Rightarrow HM$ – медиана $\Rightarrow AM = MD$
ΔAKD: прямоуг. $AM = MD \Rightarrow KM$ – бисс $\Rightarrow \begin{cases} 2KM = AD \\ MA = MD \end{cases} \Rightarrow$
$2KM = 2AM \Rightarrow KM = AM$ ч. т. д.

б) пусть $HB = x$ ΔAHB: прямоуг. $AH^2 = AB^2 - HB^2$
ΔAHC: прямоуг $AH^2 = AC^2 - HC^2 \Rightarrow AB^2 - HB^2 = AC^2 - HC^2$
$25 - \cancel{HB^2} = 64 - CB^2 - 2HB \cdot CB - \cancel{HB^2}$ $HB = 1{,}4$
ΔAKC: $KC^2 = MC \cdot AC$ $(6{,}4)^2 = 8CM$ $CM = 5{,}12$
$AM = AC - MC = 8 - 5{,}12 = 2{,}88$; $AM = MK$ $\Rightarrow MK = 2{,}88$

Ответ: б) $MK = 2{,}88$

Комментарий.

В доказательстве утверждения пункта *а* есть некорректное утверждение – «KM – биссектриса», при этом тут же записаны утверждения, соответствующие медиане прямоугольного треугольника.

Решение пункта *б* выполнено верно.

Оценка эксперта: 3 балла.

Пример 7.

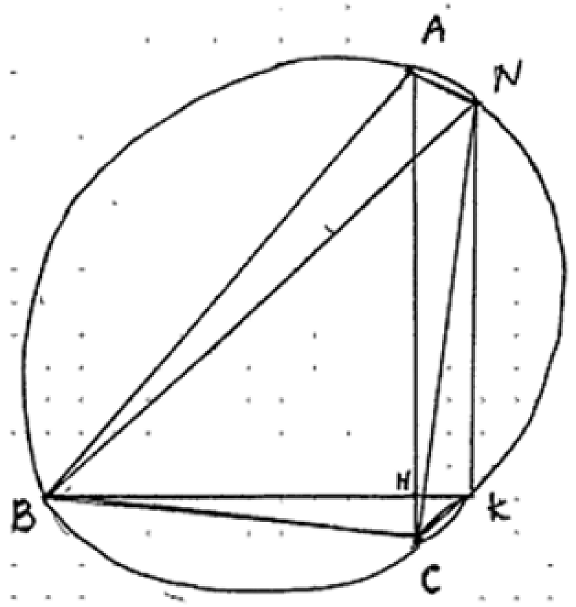
В остроугольном треугольнике ABC все стороны различны. Прямая, содержащая высоту BH треугольника ABC, вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке K. Отрезок BN — диаметр этой окружности.

а) Докажите, что $AN = CK$.

б) Найдите NK, если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен 16, $\angle BAC = 40°$, $\angle ACB = 85°$.

Ответ: б) $16\sqrt{2}$.

№16.



Дано:

BH ⊥ AC

BN - диаметр

а) Док-ть:

AN=CK

б) R=16

∠BAC=40°

∠ACB=85°

Найти:

NK-?

а) Док-во: ∠BCN=90°, т.к. BH-диаметр, ⇒ ∠BCH=90-∠HBC ⇒
⇒ ∠HCN=∠HBC, ∠HCN=∠ABN (т.к. они опираются на одну дугу) ⇒ ∠ABN=∠HBC ⇒ AN=CK (как хорды, стягивающие равные дуги).

Комментарий.

В доказательстве утверждения пункта *а* есть верное название прямого угла – «$\angle BCN = 90°$», при этом тут же записано утверждение, противоречащее условию, – «BH – диаметр». Утверждение, записанное во второй строчке «$\angle HCN = \angle ABN$ (т.к. они опираются на одну дугу)», содержит неточность, так как точка H не лежит на окружности, а $\angle ACN = \angle ABN$ (т.к. они опираются на одну дугу). Решение пункта *б* отсутствует.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 8.

В остроугольном треугольнике ABC все стороны различны. Прямая, содержащая высоту BH треугольника ABC, вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке K. Отрезок BN — диаметр этой окружности.

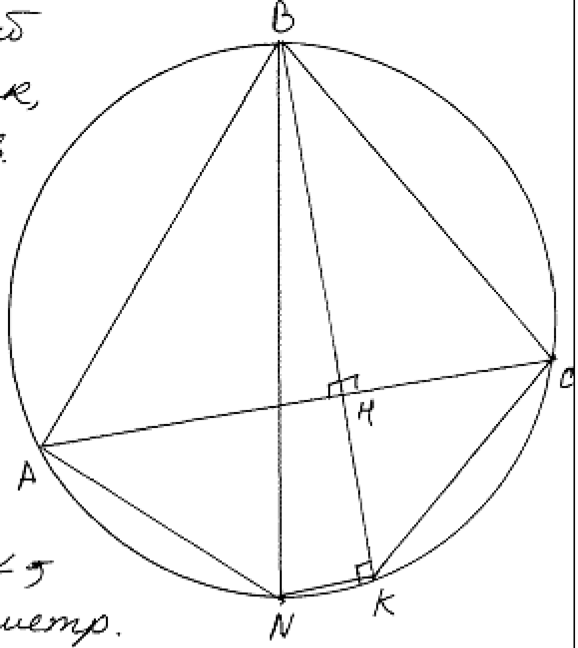
а) Докажите, что $AN = CK$.

б) Найдите NK, если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен 16, $\angle BAC = 40°$, $\angle ACB = 85°$.

Ответ: б) $16\sqrt{2}$.

и б.

а) Пусть ABC – произвольный остроугольный треугольник, вписанный в окружность. BN – диаметр. BH – высота $\triangle ABC$, прямая BK содержит высоту BH и пересекает окр. в точке K. $\angle AHB = 90^0$ (т.к BH – высота) $\angle NKB$ – вписанный $\angle$, опирающийся на диаметр. $\Rightarrow \angle NKB = 90^0$. $\Rightarrow$ Прямая $AC \parallel$ прямой $NK \Rightarrow ACKN$ – трапеция. По св-ву трапеции, вписанной в окружность ее стороны равны. $AN = CK$ ч.т.д.



Комментарий.

В доказательстве утверждения пункта *а* есть недоказанное утверждение, что $ACKN$ – трапеция. В решении есть некорректное утверждение – «По свойству трапеции, вписанной в окружность ее стороны равны», при этом рядом записано верное равенство боковых сторон. Решение пункта *б* отсутствует.

Оценка эксперта: 1 балл.

5. Критерии проверки и оценка решений задания 17

Задание №17 – это текстовая задача с экономическим содержанием.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Подробнее: 1 балл можно выставлять в тех случаях, когда сюжетное условие задачи верно сведено к решению математической (арифметической, алгебраической, функциональной, геометрической) задачи. Именно к решению, а не к отдельному равенству, набору уравнений, уравнению, задающему функцию, и т.п. Предъявленный текст должен включать и описание того, как построена модель, и направление, «продолжаемое» до верного решения.

Оценка в 2 балла, разумеется, включает в себя условие выставления 1 балла, но существенно ближе к верному решению задачи. Здесь предполагается завершенное, практически полное решение соответствующей математической задачи. Типичные допустимые погрешности здесь – вычислительные ошибки (при наличии всех шагов решения) или пробелы в описании составления модели.

Следует подчеркнуть, что один и тот же сюжет может быть успешно сведен к различным математическим моделям и доведён до верного ответа. По этой причине в критериях оценивания нет жесткого упоминания какой-либо конкретной (арифметической, алгебраической, геометрической, функциональной) модели.

Задача 17 (демонстрационный вариант 2020 г.).

15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r — **целое** число;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение r, при котором общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн рублей.

Решение. По условию, долг перед банком (в млн рублей) на 15-е число каждого месяца должен уменьшаться до нуля следующим образом:

1; 0,6; 0,4; 0,3; 0,2; 0,1; 0.

Пусть $k = 1 + \frac{r}{100}$, тогда долг на 1-е число каждого месяца равен:

$$k;\ 0{,}6k;\ 0{,}4k;\ 0{,}3k;\ 0{,}2k;\ 0{,}1k.$$

Следовательно, выплаты со 2-го по 14-е число каждого месяца составляют:

$$k-0{,}6;\ 0{,}6k-0{,}4;\ 0{,}4k-0{,}3;\ 0{,}3k-0{,}2;\ 0{,}2k-0{,}1;\ 0{,}1k.$$

Общая сумма выплат составляет:

$$k(1+0{,}6+0{,}4+0{,}3+0{,}2+0{,}1)-(0{,}6+0{,}4+0{,}3+0{,}2+0{,}1)=$$
$$=(k-1)(1+0{,}6+0{,}4+0{,}3+0{,}2+0{,}1)+1=2{,}6(k-1)+1.$$

По условию, общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн рублей, значит,

$$2{,}6(k-1)+1<1{,}2;\ 2{,}6\cdot\frac{r}{100}+1<1{,}2;\ r<7\frac{9}{13}.$$

Наибольшее целое решение этого неравенства — число 7. Значит, искомое число процентов — 7.

Ответ: 7.

Задача 1.

15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r — **целое** число;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0

Найдите наименьшее значение r, при котором общая сумма выплат будет больше 1,2 млн рублей.

Решение.
По условию, долг перед банком (в млн рублей) на 15-е число каждого месяца должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$1;\ 0{,}9;\ 0{,}8;\ 0{,}7;\ 0{,}6;\ 0{,}5;\ 0.$$

Пусть $k=1+\frac{r}{100}$, тогда долг на 1-е число каждого месяца равен:

$$k;\ 0{,}9k;\ 0{,}8k;\ 0{,}7k;\ 0{,}6k;\ 0{,}5k.$$

Следовательно, выплаты со 2-го по 14-е число каждого месяца составляют:

$$k-0{,}9;\ 0{,}9k-0{,}8;\ 0{,}8k-0{,}7;\ 0{,}7k-0{,}6;\ 0{,}6k-0{,}5;\ 0{,}5k.$$

Общая сумма выплат составляет:

$$k(1+0{,}9+0{,}8+0{,}7+0{,}6+0{,}5)-(0{,}9+0{,}8+0{,}7+0{,}6+0{,}5)=$$
$$=(k-1)(1+0{,}9+0{,}8+0{,}7+0{,}6+0{,}5)+1=4{,}5(k-1)+1.$$

По условию, общая сумма выплат будет больше 1,2 млн рублей, значит,

$$4{,}5(k-1)+1>1{,}2;\ 4{,}5\cdot\frac{r}{100}+1>1{,}2;\ r>4\frac{4}{9}.$$

Наименьшее целое решение этого неравенства — число 5. Значит, искомое число процентов — 5.

Ответ: 5.

Задача 2.

В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.
Если ежегодно выплачивать по 58 564 рубля, то кредит будет полностью погашен за 4 года, а если ежегодно выплачивать по 106 964 рубля, то кредит будет полностью погашен за 2 года. Найдите r.

Решение.
Пусть сумма кредита составляет S рублей, а ежегодные выплаты X рублей, $k=1+\frac{r}{100}$. По условию, долг перед банком (в рублях) по состоянию на июль должен уменьшаться следующим образом:

$$S,\ kS-X,\ k^2S-kX-X,\ k^3S-k^2X-kX-X,\ k^4S-k^3X-k^2X-kX-X.$$

Таким образом, если долг будет выплачен двумя равными платежами X_2, то

$$X_2=\frac{k^2\cdot(k-1)}{k^2-1}\cdot S=106\,964.$$

Если долг будет выплачен четырьмя равными платежами X_4, то

$$X_4=\frac{k^4\cdot(k-1)}{k^4-1}\cdot S=58\,564.$$

Таким образом, $\frac{X_4}{X_2}=\frac{k^2}{k^2+1}=\frac{58\,564}{106\,964}=\frac{121}{221}$, откуда $k^2=\frac{121}{100}$; $k=1{,}1$. Значит, $r=10$.

Ответ: 10.

Задача 3.

15-го января планируется взять кредит в банке на 39 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 20% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

(Считайте, что округления при вычислении платежей не производятся.)

Решение.

Пусть сумма кредита равна S. По условию, долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$S,\ \frac{38S}{39},\ \ldots,\ \frac{2S}{39},\ \frac{S}{39},\ 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$. Пусть $k = 1 + \frac{r}{100}$, тогда последовательность размеров долга на 1-е число каждого месяца такова:

$$kS,\ \frac{38kS}{39},\ \ldots,\ \frac{2kS}{39},\ \frac{kS}{39}.$$

Следовательно, выплаты должны быть следующими:

$$(k-1)S + \frac{S}{39},\ \frac{38(k-1)S + S}{39},\ \ldots,\ \frac{2(k-1)S + S}{39},\ \frac{(k-1)S + S}{39}.$$

Всего следует выплатить $S + S(k-1)\left(1 + \frac{38}{39} + \ldots + \frac{2}{39} + \frac{1}{39}\right) = S\left(1 + 20(k-1)\right)$.

Общая сумма выплат на 20% больше суммы, взятой в кредит, поэтому

$$20(k-1) = 0{,}2;\ k = 1{,}01;\ r = 1.$$

Ответ: 1.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Примеры оценивания решений задания 17

Пример 1.

15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r — **целое** число;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0

Найдите наименьшее значение r, при котором общая сумма выплат будет больше 1,2 млн рублей.

Ответ: 5.

месяц	сумма долга 1-го числа (млн р)	сумма долга (млн) 15-го числа	сумма выплат
1		1 млн	
2	$1+1\cdot r$	0,9	$1+1r-0,9$
3	$0,9+0,9\cdot r$	0,8	$0,9+0,9-0,8$
4	$0,8+0,8r$	0,7	$0,8+0,8r-0,7$
5	$0,7+0,7\cdot r$	0,6	$0,7+0,7r-0,6$
6	$0,6+0,6r$	0,5	$0,6+0,6r-0,5$
7	$0,5+0,5r$	0	$0,5+0,5r$

тогда общая сумма выплат:

$1+1\cdot r-\cancel{0,9}+\cancel{0,9}+0,9r-\cancel{0,8}+\cancel{0,8}+0,8r-\cancel{0,7}+\cancel{0,7}+0,7r-$

$-\cancel{0,6}+\cancel{0,6}+0,6r-\cancel{0,5}+\cancel{0,5}+0,5r=$

$=1+r+0,9r+0,8r+0,7r+0,6r+0,5r=1+4,5r$

Общая сумма выплат должна быть больше 1,2 млн =>

$= \quad 1+4,5r>1,2$

$4,5r>0,2$

$r>2,25$

т.к. r-целое число, то наименьшее $r=3$.

Ответ: r наименьшее $=3$

Комментарий.

Модель построена неверно. Если подставить вместо r число 3 в таблицу, то сумма долга уже на 1 число второго месяца должна составить 4 млн рублей, кроме того, еще и неравенство решено неверно.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 2.

15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r — **целое** число;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0

Найдите наименьшее значение r, при котором общая сумма выплат будет больше 1,2 млн рублей.

Ответ: 5.

17) Всего было 6 выплат: $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$.

$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 > 1,2$

$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = S$

r	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	S
7	0,17	0,163	0,156	0,149	0,142	0,535	1,315
5	0,15	0,145	0,14	0,135	0,13	0,525	1,225
4	0,14	0,136	0,132	0,128	0,124	0,52	1,18

$P_1 = \left(1 + \frac{r}{100}\right) - 0,9$

$P_2 = 0,9\left(1 + \frac{r}{100}\right) - 0,8$

$P_3 = 0,8\left(1 + \frac{r}{100}\right) - 0,7$

$P_4 = 0,7\left(1 + \frac{r}{100}\right) - 0,6$

$P_5 = 0,6\left(1 + \frac{r}{100}\right) - 0,5$

$P = 0,5\left(1 + \frac{r}{100}\right)$

Наименьшее число r, при котором $S > 1,2$ является 5. При $r = 4$, $S < 1,2$.

Ответ: 5

Комментарий.

Модель построена верно. Усложняет проверку отсутствие вычислений. В таблице все результаты вычислений по формулам, записанным справа, верные. Логика решения верна.

Оценка эксперта: 3 балла.

Пример 3.

15-го января был выдан полугодовой кредит на развитие бизнеса. В таблице 15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r — **целое** число;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0

Найдите наименьшее значение r, при котором общая сумма выплат будет больше 1,2 млн рублей.

Ответ: 5.

Дано:
$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 > 1,2$ млн, где x – выплата
$N = 1$ – сумма кредита

r_{min} – ?, где r – %, $r \in Z$

$X_1 = N + \frac{rN}{100} - 0,9$; $X_2 = 0,9 + \frac{r \cdot 0,9}{100} - 0,8$; $X_3 = 0,8 + \frac{r \cdot 0,8}{100} - 0,7$;
$X_4 = 0,7 + \frac{r \cdot 0,7}{100} - 0,6$; $X_5 = 0,6 + \frac{r \cdot 0,6}{100} - 0,5$; $X_6 = 0,5 + \frac{r \cdot 0,5}{100}$

$1 + \frac{r}{100} - 0,9 + 0,9 + \frac{r \cdot 0,9}{100} - 0,8 + 0,8 + \frac{r \cdot 0,8}{100} - 0,7 + 0,7 + \frac{r \cdot 0,7}{100} - 0,6 + 0,6 + \frac{r \cdot 0,6}{100} - 0,5 + 0,5 + \frac{r \cdot 0,5}{100} > 1,2$

$1 + \frac{3,5r}{100} > 1,2$ $\qquad r > \frac{20}{3,5}$ $\qquad$ Ответ: $r = 5\%$
$\frac{3,5r}{100} > 0,2$ $\qquad r_{min} = 5\%$

Комментарий.
Почти правильное решение, содержащее ошибки (вычислительного характера). Две ошибки: 1) $1 + \frac{4,5r}{100} > 1,2$, а не $1 + \frac{3,5r}{100} > 1,2$; 2) $\frac{20}{3,5} > 5,7$, т.е. должно быть $r = 6$ – не позволяют выставить 2 балла.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 4.

В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на r% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Если ежегодно выплачивать по 58 564 рубля, то кредит будет полностью погашен за 4 года, а если ежегодно выплачивать по 106 964 рубля, то кредит будет полностью погашен за 2 года. Найдите r.

Ответ: 10.

17. Пусть $(1+\frac{r}{100})=x$

		1 способ	2 способ
Январь	2021	Sx	Sx
июнь	2021	$Sx-58564$	$Sx-106964$
январь	2022	$Sx^2-58564x$	$Sx^2-106964x$
июнь	2022	$Sx^2-58564x-58564$	$Sx^2-106964x-106964$
Январь	2023	$Sx^3-58564x^2-58564x$	0
июнь	2023	$Sx^3-58564x^2-58564x-58564$	0
январь	2024	$Sx^4-58564x^3-58564x^2-58564x$	0
июнь	2024	$Sx^4-58564x^3-58564x^2-58564x-58564$	0

$$\begin{cases} Sx^2-106964x-106964=0 \\ Sx^4-58564x^3-58564x^2-58564x-58564=0 \end{cases}$$

1) $S=\frac{106964}{x}+\frac{106964}{x^2}$

2) $S=\frac{58564}{x}+\frac{58564}{x^2}+\frac{58564}{x^3}+\frac{58564}{x^4}$

$$\frac{106964}{x}+\frac{106964}{x^2}=\frac{58564}{x}+\frac{58564}{x^2}+\frac{58564}{x^3}+\frac{58564}{x^4}$$

$$\frac{48400}{x}+\frac{48400}{x^2}-\frac{58564}{x^3}-\frac{58564}{x^4}=0 \quad |\cdot x^4$$

$$48400x^3+48400x^2-58564x-58564=0$$

$$48400x^2(x+1)-58564(x+1)=0$$

$$(x+1)(48400x^2-58564)=0$$

$x=-1$, не подх. по усл.

$$48400x^2=58564$$

$$x=\frac{242}{200}$$

3: $(1+\frac{r}{100})=\frac{242}{100}$

$$r=10$$

Ответ: 10%.

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 3 балла.

Пример 5.

В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Если ежегодно выплачивать по 58 564 рубля, то кредит будет полностью погашен за 4 года, а если ежегодно выплачивать по 106 964 рубля, то кредит будет полностью погашен за 2 года. Найдите r.

Ответ: 10.

№17

S - сумма взятого кредита

r - кол-во процентов.

$k = 1 + \frac{r}{100} \quad k > 0$

$\cancel{\left(\left(\left(S + \frac{Sr}{100}\right) - 58564\right)\left(1 + \frac{r}{100}\right) - 58564\right)\left(1 + \frac{r}{100}\right) - 58564\right)\left(1 + \frac{r}{100}\right) - 58564 = 0}$

$$\begin{cases} (((Sk - 58564)k - 58564)k - 58564)k - 58564 = 0 \\ (Sk - 106964)k - 106964 = 0 \end{cases}$$

$12100k^3 + 12100k^2 - 14641k - 14641 = 0$

$12100k^2(k+1) - 14641(k+1) = 0$

$(12100k^2 - 14641)(k+1) = 0$

$k^2 = \frac{14641}{12100}, \quad k = \frac{\sqrt{14641}}{110}$

$1 + \frac{r}{100} = \frac{\sqrt{14641}}{110}$

$r = \left(\frac{\sqrt{14641}}{110} - 1\right)100 = \frac{100\sqrt{14641}}{110} - 100$

Ответ: $\frac{100\sqrt{14641}}{110} - 100$

Комментарий.

В решении без объяснений записаны уравнения. Переход от системы к уравнению относительно k не объяснен. Числовой ответ явно не получен: не извлечен корень из числа 14641. Таким образом, решение недостаточно обоснованное.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 6.

15-го января был выдан полугодовой кредит на развитие бизнеса. В таблице 15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r — **целое** число;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0

Найдите наименьшее значение r, при котором общая сумма выплат будет больше 1,2 млн рублей.

Ответ: 5.

$$1+\frac{r}{100}+0{,}9\frac{r}{100}+0{,}8\frac{r}{100}+0{,}7\frac{r}{100}+0{,}6\frac{r}{100}+0{,}5\frac{r}{100}>1{,}2$$

$$4{,}5\frac{r}{100}>0{,}2$$

$$9\frac{r}{100}>0{,}4$$

$\frac{r}{100}>\frac{4}{90}$ ближайшие к числа 4 и 5

$\frac{4}{100}<\frac{4}{90}$ не подходит, берём на 1 больше.

$$\frac{5}{100}=\frac{1}{20}>\frac{4}{90}$$

$\frac{90}{1800}>\frac{80}{1800}$ => Ответ. $r=5$

Комментарий.

В решении без объяснений записано неравенство. Неравенство явно не решено. Таким образом, решение недостаточно обоснованное.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 7.

15-го января планируется взять кредит в банке на 39 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 20% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Ответ: 1.

N17.

S - сумма, которую взяли в кредит

x - сумма, на которую каждый раз уменьшается долг.

$\frac{r\%}{100} = n$, где на $r\%$ ~~на~~ возрастает долг.

	банк	выплаты
1.	$S+Sn$	$Sn+x$
2.	$S-x+(S-x)n$	$(S-x)n+x$
⋮		
39.	$S-38x+(S-38x)n$	$(S-38x)n+x \Rightarrow S-38x+(S-38x)n=(S-38x)n+x \Rightarrow$
40.	0	$\Rightarrow S=39x$

Z - сумма выплат

По условию: $Z-S=0,2S$

$Z = Sn+x+(S-x)n+x+\ldots+(S-38x)n+x = 39x+n(39S-(x+2x+\ldots+38x)) = 39x+n(39S-x(\frac{1+38}{2}\cdot 38)) = 39x+n\cdot 39S - nx\cdot 39\cdot 19 = 39x+n\cdot 39\cdot 39x - n\cdot 39\cdot 19x = 39x+39\cdot 20nx \Rightarrow$

$\Rightarrow 39x+39\cdot 20nx - 39x = 0,2\cdot 39x \Rightarrow 39\cdot 20nx = 0,2\cdot 39x \Rightarrow$

$\Rightarrow n=\frac{0,2}{20}=\frac{1}{100}$; $r = n\cdot 100 \Rightarrow r=1\%$

Ответ: 1%.

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 3 балла.

Пример 8.

15-го января планируется взять кредит в банке на 39 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 20% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Ответ: 1.

№17.

Всего 39 месяцев. Пусть сумма, взятая в кредит – S. Пусть $k = \frac{r}{100}$ – коэффициент начисления процентов. ~~Тогда~~. Выплаты каждый месяц будут состоять: из части долга $\frac{S}{39}$ + проценты за месяц. Проценты за месяц, вычисляются по формуле:

1 месяц. 2 м. 3 м 39 м.

$$S\cdot k + \frac{38S\cdot k}{39} + \frac{37S\cdot k}{39} \dots \frac{S\cdot k}{39}.$$

Применим формулу арифметической прогрессии

$$N = \left(\frac{x_1 + x_n}{2}\right)\cdot n$$

$$\text{Проценты} = \left(\frac{S\cdot k + \frac{S\cdot k}{39}}{2}\right)\cdot 39 = \frac{39S\cdot k + S\cdot k}{2} = \frac{40S\cdot k}{2} = 20Sk.$$

Часть долга:

1 м 2 м 39 м

$$\frac{S}{39} + \frac{S}{39} + \dots + \frac{S}{39} = S.$$

Общие выплаты: $k = \frac{r}{100}$

$S + 20\cdot S\cdot k = 1{,}2\cdot S$ $\quad 0{,}01\cdot 100 = r \Rightarrow r = 1\%$

$20k = 0{,}2.$ Ответ: 1%

$k = 0{,}01$

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 3 балла.

6. Критерии проверки и оценка решений задания 18

Задание №18 – это уравнение, неравенство или их системы с параметром.

Задачи с параметром допускают весьма разнообразные способы решения. Наиболее распространенными из них являются:

– чисто алгебраический способ решения;

– способ решения, основанный на построении и исследовании геометрической модели данной задачи;

– функциональный способ, в котором могут быть и алгебраические, и геометрические моменты, но базовым является исследование некоторой функции.

Зачастую (но далеко не всегда) графический метод более ясно ведёт к цели. Кроме того, в конкретном тексте решения вполне могут встречаться элементы каждого из трех перечисленных способов.

Задача 18 (демонстрационный вариант 2020 г.).

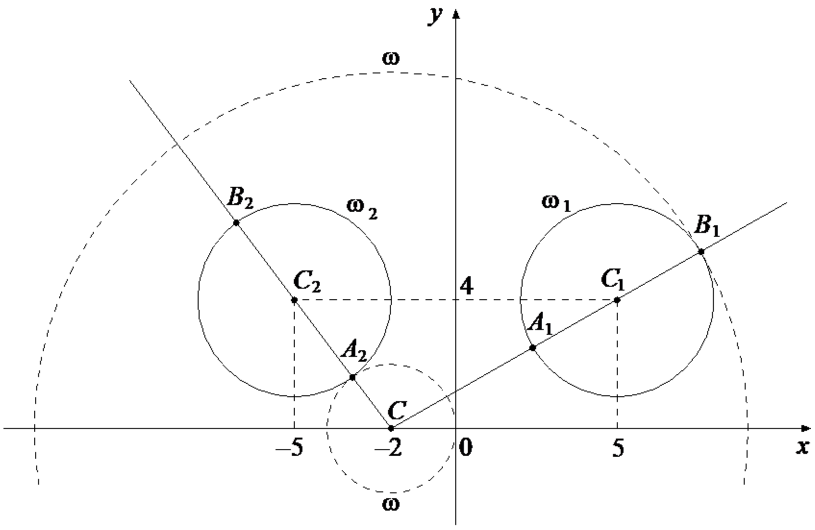
Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}(|x|-5)^2+(y-4)^2=9,\\(x+2)^2+y^2=a^2\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Если $x\ge 0$, то уравнение $(|x|-5)^2+(y-4)^2=9$ задаёт окружность ω_1 с центром в точке $C_1(5;\ 4)$ радиусом 3, а если $x<0$, то оно задаёт окружность ω_2 с центром в точке $C_2(-5;\ 4)$ таким же радиусом (см. рисунок).

При положительных значениях a уравнение $(x+2)^2+y^2=a^2$ задаёт окружность ω с центром в точке $C(-2;\ 0)$ радиусом a. Поэтому задача состоит в том, чтобы найти все значения a, при каждом из которых окружность ω имеет единственную общую точку с объединением окружностей ω_1 и ω_2.



Из точки C проведём луч CC_1 и обозначим через A_1 и B_1 точки его пересечения с окружностью ω_1, где A_1 лежит между C и C_1. Так как $CC_1=\sqrt{(5+2)^2+4^2}=\sqrt{65}$, то $CA_1=\sqrt{65}-3$, $CB_1=\sqrt{65}+3$.

При $a<CA_1$ или $a>CB_1$ окружности ω и ω_1 не пересекаются.

При $CA_1<a<CB_1$ окружности ω и ω_1 имеют две общие точки.

При $a=CA_1$ или $a=CB_1$ окружности ω и ω_1 касаются.

Из точки C проведём луч CC_2 и обозначим через A_2 и B_2 точки его пересечения с окружностью ω_2, где A_2 лежит между C и C_2. Так как $CC_2=\sqrt{(-5+2)^2+4^2}=5$, то $CA_2=5-3=2$, $CB_2=5+3=8$.

При $a<CA_2$ или $a>CB_2$ окружности ω и ω_2 не пересекаются.

При $CA_2<a<CB_2$ окружности ω и ω_2 имеют две общие точки.

При $a=CA_2$ или $a=CB_2$ окружности ω и ω_2 касаются.

Исходная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда окружность ω касается ровно одной из двух окружностей ω_1 и ω_2 и не пересекается с другой. Так как $CA_2<CA_1<CB_2<CB_1$, то условию задачи удовлетворяют только числа $a=2$ и $a=\sqrt{65}+3$.

Ответ: 2; $\sqrt{65}+3$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены оба верных значения параметра, но – или в ответ включены также и одно-два неверных значения; – или решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра	2
Задача сведена к исследованию: – или взаимного расположения трёх окружностей; – или двух квадратных уравнений с параметром	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Задача 1.

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$\sqrt{3x^2+2ax+1}=x^2+ax+1$ имеет ровно три различных корня.

Решение. Исходное уравнение равносильно уравнению $3x^2+2ax+1=\left(x^2+ax+1\right)^2$ при условии $x^2+ax+1\ge 0$.

Решим уравнение $3x^2+2ax+1=\left(x^2+ax+1\right)^2$:

$$3x^2+2ax+1=x^4+2ax^3+\left(a^2+2\right)x^2+2ax+1;\ x^4+2ax^3+\left(a^2-1\right)x^2=0;$$

$$x^2\left(x+a+1\right)\left(x+a-1\right)=0, \text{ откуда } x=0,\ x=1-a \text{ или } x=-1-a.$$

Исходное уравнение имеет три корня, когда эти числа различны и для каждого из них выполнено условие $x^2+ax+1\ge 0$.

Рассмотрим условия совпадения корней. При $a=1$ имеем $1-a=0$. При $a=-1$ имеем $-1-a=0$. При остальных значениях a числа 0, $1-a$, $-1-a$ различны.

При $x=0$ получаем: $x^2+ax+1=1\ge 0$ при всех значениях a.

При $x=1-a$ получаем: $x^2+ax+1=(1-a)^2+a(1-a)+1=2-a$.

Это выражение неотрицательно при $a\le 2$.

При $x=-1-a$ получаем: $x^2+ax+1=(-1-a)^2+a(-1-a)+1=a+2$.

Это выражение неотрицательно при $a\ge -2$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно три различных корня при

$$-2\le a<-1;\ -1<a<1;\ 1<a\le 2.$$

Ответ: $-2\le a<-1;\ -1<a<1;\ 1<a\le 2$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только исключением точек $a=-2$ и/или $a=2$	3
С помощью верного рассуждения получен промежуток $(-2;2)$ множества значений a, возможно, с включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Получены корни уравнения $3x^2+2ax+1=\left(x^2+ax+1\right)^2$: $x=0$, $x=1-a$, $x=-1-a$; и задача верно сведена к исследованию полученных корней при условии $x^2+ax+1>0$ ($x^2+ax+1\ge 0$)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Задача 2.

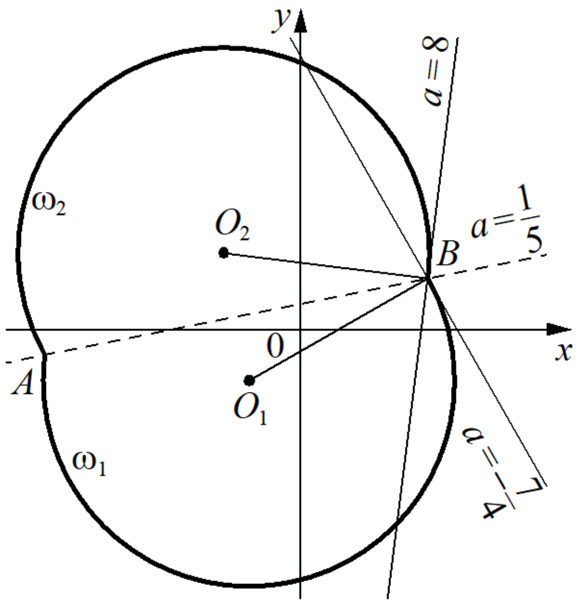
Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+5x+y^2-y-|x-5y+5|=52, \\ y-2=a(x-5) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Решение.

Изобразим на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют первому уравнению системы.



Рассмотрим два случая:

1) Если $x-5y+5\geq 0$, то получаем уравнение

$$x^2+5x+y^2-y-x+5y-5=52;$$

$$x^2+4x+y^2+4y-57=0;$$

$$(x+2)^2+(y+2)^2=65.$$

Полученное уравнение задаёт окружность с центром в точке $O_1(-2;-2)$ и радиусом $\sqrt{65}$.

2) Если $x-5y+5\leq 0$, то получаем уравнение

$$x^2+5x+y^2-y+x-5y+5=52;\ x^2+6x+y^2-6y-47=0;\ (x+3)^2+(y-3)^2=65.$$

Полученное уравнение задаёт окружность с центром в точке $O_2(-3;3)$ и радиусом $\sqrt{65}$.

Полученные окружности пересекаются в двух точках $A(-10;-1)$ и $B(5;2)$, лежащих на прямой $x-5y+5=0$, поэтому в первом случае получаем дугу ω_1 с концами в точках A и B, во втором — дугу ω_2 с концами в тех же точках (см. рис.).

Рассмотрим второе уравнение системы. Оно задаёт прямую m, которая проходит через точку B и угловой коэффициент которой равен a.

При $a=\frac{1}{5}$ прямая m проходит через точки A и B, то есть исходная система имеет два решения.

При $a=-\frac{7}{4}$ прямая m перпендикулярна прямой O_1B, угловой коэффициент которой равен $\frac{4}{7}$, значит, прямая m касается дуги ω_1 в точке B и пересекает дугу ω_2 в двух точках (одна из которых — точка B), то есть исходная система имеет два решения.

При $a=8$ прямая m перпендикулярна прямой O_2B, угловой коэффициент которой равен $-\frac{1}{8}$, значит, прямая m касается дуги ω_2 в точке B и пересекает дугу ω_1 в двух точках (одна из которых — точка B), то есть исходная система имеет два решения.

При $a<-\frac{7}{4}$ или $a>8$ прямая m пересекает каждую из дуг ω_1 и ω_2 в точке B и ещё в одной точке, отличной от точки A, то есть исходная система имеет три решения.

При $-\frac{7}{4}<a<\frac{1}{5}$ прямая m пересекает дугу ω_2 в двух точках (одна из которых — точка B) и не пересекает дугу ω_1 в точках, отличных от точки B, то есть исходная система имеет два решения.

При $\frac{1}{5}<a<8$ прямая m пересекает дугу ω_1 в двух точках (одна из которых — точка B) и не пересекает дугу ω_2 в точках, отличных от точки B, то есть исходная система имеет два решения.

Значит, исходная система имеет ровно два решения при $-\frac{7}{4}\le a\le 8$.

Ответ: $-\frac{7}{4}\le a\le 8$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только исключением точек $a=-\frac{7}{4}$ и/или $a=8$	3
При всех значениях a верно найдено количество решений системы в одном из двух случаев, возникающих при раскрытии модуля ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения дуг окружностей и прямых (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Задача 3.

Найдите все значения *a*, при каждом из которых уравнение

$$\frac{|3x|-2x-2-a}{x^2-2x-a}=0$$

имеет ровно два различных корня.

Решение.

Корнями исходного уравнения являются корни уравнения $|3x|-2x-2-a=0$, для которых выполнено условие $x^2-2x-a\neq 0$.

При $x\le 0$ уравнение $|3x|-2x-2-a=0$ принимает вид $-5x-2-a=0$ и задаёт на плоскости Oxa луч l_1 с началом в точке $(0;-2)$. При $x\ge 0$ уравнение $|3x|-2x-2-a=0$ принимает вид $x-2-a=0$ и задаёт луч l_2 с началом в точке $(0;-2)$. Значит, уравнение $|3x|-2x-2-a=0$ имеет два корня при $a>-2$, имеет один корень при $a=-2$ и не имеет корней при $a<-2$.

Уравнение $x^2-2x-a=0$ задаёт параболу $a=x^2-2x$.

Координаты точек пересечения параболы $a=x^2-2x$ с лучом l_1 являются решениями системы:

$$\begin{cases} a=x^2-2x, \\ a=-5x-2, \\ x\le 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -5x-2=x^2-2x, \\ a=-5x-2, \\ x\le 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x+1)(x+2)=0, \\ a=-5x-2, \\ x\le 0. \end{cases}$$

Значит, парабола $a=x^2-2x$ пересекается с лучом l_1 в точках $(-1;3)$ и $(-2;8)$.

Координаты точек пересечения параболы $a=x^2-2x$ с лучом l_2 являются решениями системы:

$$\begin{cases} a=x^2-2x, \\ a=x-2, \\ x\ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x-2=x^2-2x, \\ a=x-2, \\ x\ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x-1)(x-2)=0, \\ a=x-2, \\ x\ge 0. \end{cases}$$

Значит, парабола $a=x^2-2x$ пересекается с лучом l_2 в точках $(1;-1)$ и $(2;0)$.

Следовательно, условие $x^2-2x-a\neq 0$ выполнено для корней уравнения $|3x|-2x-2-a=0$ при всех a, кроме $a=-1$, $a=0$, $a=3$ и $a=8$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два корня при $-2<a<-1$; $-1<a<0$; $0<a<3$; $3<a<8$; $a>8$.

Ответ: $-2<a<-1$; $-1<a<0$; $0<a<3$; $3<a<8$; $a>8$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точки $a=-2$	3
Верно рассмотрен хотя бы один из случаев решения, и получено или множество значений a, отличающееся от искомого только включением точек $a=8$, $a=3$ и / или $a=-2$, или множество значений a, отличающееся от искомого только включением точек $a=0$, $a=-1$ и / или $a=-2$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения параболы и лучей (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Примеры оценивания решений задания 18

Пример 1.

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{3x^2+2ax+1}=x^2+ax+1 \text{ имеет ровно три различных корня.}$$

Ответ: $-2 \le a < -1$; $-1 < a < 1$; $1 < a \le 2$.

№18. $\sqrt{3x^2+2ax+1}=x^2+ax+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+ax+1 \ge 0 \\ 3x^2+2ax+1=(x^2+ax+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+ax+1\ge 0 \\ 3x^2+2ax+1=x^4+2ax^3+x^2(2+a^2)+2ax+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+ax+1\ge 0 \\ x^2(x^2+2ax+2+a^2-3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+ax+1\ge 0 \\ x^2(x^2+2ax+a^2-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+ax+1\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+2ax+a^2-1=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow (*) \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \begin{cases} x^2+ax+1\ge 0 \; (2) \\ x^2+2ax+a^2-1=0 \; (1) \end{cases} \end{array}\right.$$

Для того чтобы система имела 3 различных решения, необходимо, чтобы (1) имело 2 различных решения не равных 0 и удовлетворяющих (2), пусть $g(x)=x^2+2ax+a^2-1$, $f(x)=x^2+ax+1$; $g(0)=0 \Rightarrow a^2-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=-1 \end{array}\right. \Rightarrow a=1$ и $a=-1$ не подходят

Заметим, что (1) $\Leftrightarrow x^2+2ax+a^2-1=0 \Leftrightarrow (x+a)^2-1=0 \Leftrightarrow (x+a-1)(x+a+1)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1-a \\ x=-1-a \end{array}\right.; \text{ тогда } (*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \begin{cases} x^2+ax+1\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=1-a \\ x=-1-a \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \begin{cases} 1-2a+a^2+a-a^2+1\ge 0 \\ x=1-a \end{cases} \\ \begin{cases} 1+2a+a^2-a-a^2+1\ge 0 \\ x=-1-a \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ (4)\begin{cases} a\le 2 \\ x=1-a \end{cases} \\ (3)\begin{cases} a\ge -2 \\ x=-1-a \end{cases} \end{array}\right. (**)$$

три различных решения система имеет тогда (3) и (4) имеют различные, не равные нулю решения; Найдём, при каких a совпадают корни 3 и 4:

$1-a=-1-a \Leftrightarrow 1=-1 \Rightarrow$ таких a не существует. (3) имеет реш. равное 0 при $a=-1$ – не подход. , (4) имеет реш. $=0$ при $a=1$ – не подход.

(3) имеет реш. при $a\ge -2$; (4) имеет реш. при $a\le 2 \Rightarrow$ (3) и (4) имеют различные реш., отлич. от 0 при $a\in[-2;2]$ и $a\ne \pm 1$

Ответ: $a\in[-2;-1)\cup(-1;1)\cup(1;2]$

***Комментарий*.**

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 4 балла.

Пример 2.

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{3x^2+2ax+1}=x^2+ax+1 \text{ имеет ровно три различных корня.}$$

Ответ: $-2\le a<-1$; $-1<a<1$; $1<a\le 2$.

$\sqrt{3x^2+2ax+1}=x^2+ax+1$

$\begin{cases} x^2+ax+1\ge 0 \\ 3x^2+2ax+1=x^4+a^2x^2+1+2x^2+2ax^3+2ax \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+ax+1\ge 0 \\ x^4+a^2x^2-x^2+2ax^3=0. \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+ax+1\ge 0 \\ x^2(x^2+a^2-1+2ax)=0. \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+ax+1\ge 0. \\ \left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ x^2+2ax+a^2-1=0; \end{array}\right. \end{cases}$

Уравнение имеет решение, когда

$x^2+2ax+a^2-1=0$ имеет 2 корня и

они удовлетворяют неравенству $x^2+ax+1\ge 0$.

$x^2+2ax+a^2-1=0$

$(x+a)^2-1=0$

$(x+a-1)(x+a+1)=0.$

$\left[\begin{array}{l} x=-a+1 \\ x=-a-1 \end{array}\right.$ Подставим x в $x^2+ax+1\ge 0.$

1) $(-a+1)^2+a(-a+1)+1\ge 0.$ 2) $(-a-1)^2+a(-a-1)+1\ge 0$

$a^2-2a+1-a^2+a+1\ge 0.$ $a^2+2a+1-a^2-a+1\ge 0$

$-a+2\ge 0$ $a\le 2$ $2a+2\ge 0$

$a\in[-1;2].$ $a\ge -1.$

Найдем значение x, когда они совпадают;

3 случая

1) $-a+1=-a-1$ 1) - нет решений

2) $0=-a+1$ 2) $a=1$

3) $0=-a-1$ 3) $a=-1.$ $\}$ - выкалываем эти точки

$\Downarrow$

$a\in(-1;1)\cup(1;2].$

Ответ: при $a\in(-1;1)\cup(1;2]$ уравнение имеет 3 разл. корня.

Комментарий.

Решение логично, все шаги присутствуют, но при решении неравенства в пункте 2) допущена ошибка вычислительного характера, что соответствует критерию на 2 балла.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 3.
Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{3x^2+2ax+1}=x^2+ax+1 \text{ имеет ровно три различных корня.}$$

Ответ: $-2\le a<-1$; $-1<a<1$; $1<a\le 2$.

№ 18

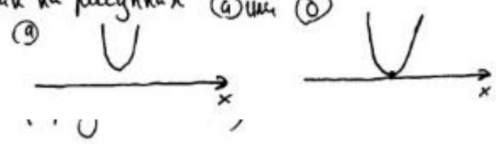
$\sqrt{3x^2+2ax+1}=x^2+ax+1$ (1); a-? ур-е имеет 3 различных корня

1) О.Д.З: $x^2+ax+1\geq 0$

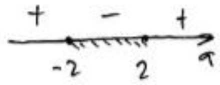
$x^2+ax+1=0$; $x^2+ax+1\geq 0$, если $D\leq 0$, так как тогда парабола будет располагаться так, как на рисунках ⓐ или ⓑ

$D=a^2-4$

ветви направлены вверх так как коэф. при x^2 равен $1>0$



$D\leq 0 \Rightarrow a^2-4\leq 0$; $(a-2)(a+2)\leq 0$



$\Rightarrow a\in[-2;2]$ (*)

2) ~~прос~~ при $a\in[-2;2]$ возведём обе части уравнение в квадрат, тогда

$3x^2+2ax+1=(x^2+ax+1)^2$

$3x^2+2ax+1=(x^2+ax)^2+2(x^2+ax)+1$

$3x^2+\cancel{2ax}+\cancel{1}=x^4+2ax^3+a^2x^2+2x^2+\cancel{2ax}+\cancel{1}$

$x^4+2ax^3+(a^2+2-3)x^2=0$

$x^2\cdot(x^2+2ax+a^2-1)=0$

$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+2ax+a^2-1=0 \end{array}\right.$

Чтобы уравнение имело ровно 3 различных корня нужно, чтобы $x^2+2ax+a^2-1=0$ имело ровно 2 корня, отличные от друг друга

$x^2+2ax+a^2-1=0$ (**)

$\frac{D}{4}=a^2-a^2+1=1 \Rightarrow x_{1,2}=-a\pm 1$

$x_1\neq x_2$, т.к. $-\cancel{a}+1=\cancel{-a}-1 \Rightarrow 1=-1$ – не верно

$\Rightarrow$ уравнение (**) имеет 2 различных корня при $\forall a$ из ОДЗ

$\Rightarrow$ уравнение (1) имеет 3 различных корня при $\forall a$ из ОДЗ, то есть $a\in[-2;2]$

Ответ: $a\in[-2;2]$

***Комментарий*.**
Получены корни уравнения $x=0$, $x=1-a$, $x=-1-a$ и задача сведена к исследованию полученных корней при условии $x^2+ax+1\ge 0$ (есть только указание).

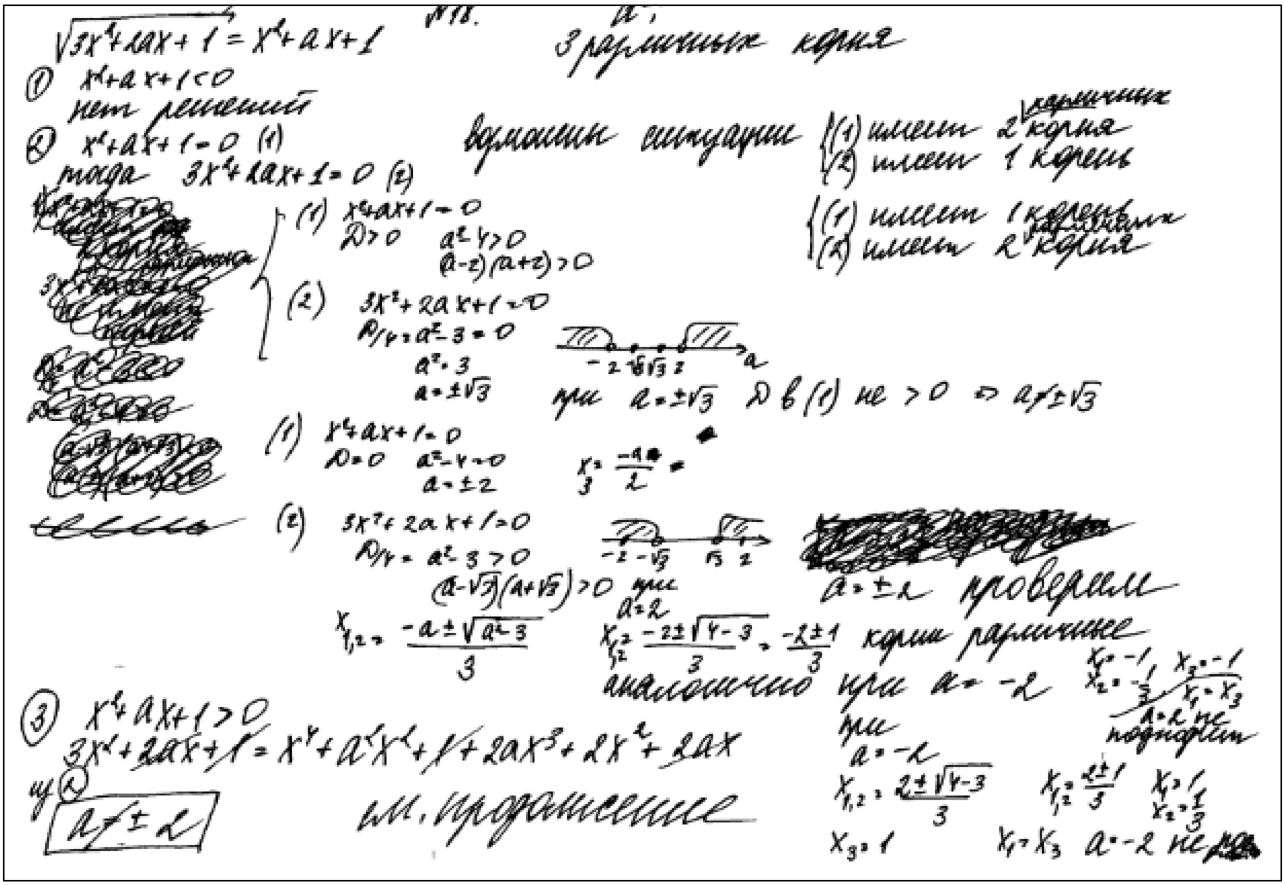
Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 4.

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$\sqrt{3x^2+2ax+1}=x^2+ax+1$ имеет ровно три различных корня.

Ответ: $-2\le a<-1;\ -1<a<1;\ 1<a\le 2$.


$\sqrt{3x^2+2ax+1}=x^2+ax+1$ №18. a; 3 различных корня

① $x^2+ax+1<0$ нет решений

② $x^2+ax+1=0$ (1) тогда $3x^2+2ax+1=0$ (2)

Возможны ситуации: (1) имеет 2 различных корня, (2) имеет 1 корень; (1) имеет 1 корень, (2) имеет 2 различных корня

(1) $x^2+ax+1=0$, $D>0$, $a^2-4>0$, $(a-2)(a+2)>0$

(2) $3x^2+2ax+1=0$, $D/4=a^2-3=0$, $a^2=3$, $a=\pm\sqrt{3}$

при $a=\pm\sqrt{3}$ D в (1) не >0 $\Rightarrow$ $a\ne\pm\sqrt{3}$

(1) $x^2+ax+1=0$, $D=0$, $a^2-4=0$, $a=\pm 2$; $x_3=\frac{-a}{2}$

(2) $3x^2+2ax+1>0$, $D/4=a^2-3>0$, $(a-\sqrt{3})(a+\sqrt{3})>0$ при $a=2$

$x_{1,2}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-3}}{3}$

$a=\pm 2$ проверяем

$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-3}}{3}=\frac{-2\pm1}{3}$ корни различные; $x_1=-1$, $x_2=-\frac{1}{3}$, $x_3=-1$, $x_1=x_3$, $a=2$ не подходит

аналогично при $a=-2$

при $a=-2$ $x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-3}}{3}$, $x_{1,2}=\frac{2\pm1}{3}$, $x_1=1$, $x_2=\frac{1}{3}$, $x_3=1$, $x_1=x_3$, $a=-2$ не подх.

③ $x^2+ax+1>0$

$3x^2+2ax+1=x^4+a^2x^2+1+2ax^3+2x^2+2ax$

из ② $\boxed{a\ne\pm2}$ см. продолжение

Продолжение № 18.

③ $x^4+a^2x^2-x^2+2ax^3=0$

$x^2+ax+1>0$ (*) должно выполняться нер-во со звёздочкой

$x^2(x^2+a^2-1+2ax)=0$

$\boxed{x_3=0}$ – корень, который ур-е будет иметь независимо от параметра a

$x^2+2ax+a^2-1=0$

должно иметь 2 различных решения, тогда ур-е будет иметь 3 корня

$D/4=a^2-(a^2-1)>0$

$a^2-a^2+1>0$

верно для любого a

(корни не должны совпадать и не должны равняться x_3)

$x_{1,2}=\frac{-a\pm1}{1}$

$x_1=-a+1$ $x_2=-a-1$

$x_1\ne x_2$ $-a+1\ne-a-1$

$1\ne-1$ верно для любого a

$x_1\ne x_3$

$-a+1\ne0$ $-a-1\ne0$

$\boxed{a\ne1}$ $\boxed{a\ne-1}$

(*): $x_1=-a+1$ $x_2=-a-1$

должны выполняться оба нер-ва (и при x_1 и при x_2)

$(-a+1)^2+a(-a+1)+1>0$ $(-a-1)^2+a(-a-1)+1>0$

$(1-a)^2-a^2+a+1>0$ $(a+1)^2-a^2-a+1>0$

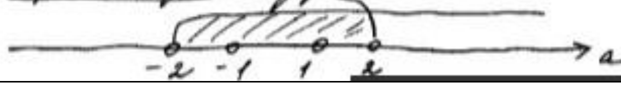
$1-2a+a^2-a^2+a+1>0$ $a^2+2a+1-a^2-a+1>0$

$2-a>0$ $a+2>0$

$\boxed{a<2}$ $a>-2$

3 корня ур-е будет иметь при a:

$a\in(-2;-1)\cup(-1;1)\cup(1;2)$



Ответ: $(-2;-1)\cup(-1;1)\cup(1;2)$

Комментарий.

В решении присутствуют все этапы. Решение соответствует критерию на 3 балла: с помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только исключением точек $a=-2$ и/или $a=2$.

Оценка эксперта: 3 балла.

Пример 5.

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+5x+y^2-y-|x+5y+5|=52, \\ y-2=a(x-5) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Ответ: $-8 \le a \le \frac{7}{4}$.

$$\begin{cases} x^2+5x+y^2+y-|x+5y+5|=52 & (1) \\ y+2=a(x-5) & (2) \end{cases}$$

(1) $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+5y+5 \geq 0 \\ x^2+5x+y^2+y-x-5y-5=52 \end{cases} \\ \begin{cases} y < \frac{-x-5}{5} \\ x^2+5x+y^2+y+x+5y+5=52 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \geq \frac{-x-5}{5} \\ x^2+4x+y^2-4y=57 \end{cases} \\ \begin{cases} y < \frac{-x-5}{5} \\ x^2+6x+y^2+6y=47 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \geq \frac{-x-5}{5} \\ (x+2)^2+(y-2)^2=65 \end{cases} \quad (1.1) \\ \begin{cases} y < \frac{-x-5}{5} \\ (x+3)^2+(y+3)^2=65 \end{cases} \quad (1.2) \end{array}\right.$

$(x+2)^2+(y-2)^2=65$ – ур-е окр-ти с центром в т. $Q(-2;2)$ и $R_1=\sqrt{65}$

$(x+3)^2+(y+3)^2=65$ – ур-е окр-ти с центром в т. $P(-3;-3)$ и $R_2=R_1=\sqrt{65}$

1.1) $\begin{cases} y \geq \frac{-x-5}{5} \\ (x+2)^2+(y-2)^2=65 \end{cases}$

т. перес. с прямой $y=\frac{-x-5}{5}$

$(x+2)^2+\left(\frac{-x-5}{5}-2\right)^2=65$

$(x+2)^2+\left(\frac{-(x+5)-10}{5}\right)^2=65$

$(x+2)^2+\frac{(x+5+10)^2}{25}=65$

$(x+2)^2+\frac{(x+15)^2}{25}=65$

$x^2+4x+4+\frac{x^2+30x+225}{25}=65$

$25x^2+100x+100+x^2+30x+225-65\cdot25=0$

$26x^2+130x-1300=0$

$2x^2+10x-100=0$

$x^2+5x-50=0$

$D=25+200=225$

$x_1=\frac{-5+15}{2}=5$, $\quad y_1=\frac{-5-5}{5}=-2$

$x_2=\frac{-5-15}{2}=-10$ $\quad y_2=\frac{10-5}{5}=1$

12. 1) $\begin{cases} y < -\frac{x-5}{5} \\ (x+3)^2+(y+3)^2=65 \end{cases}$

т. перес. с пр. $y=-\frac{x-5}{5}$

$(x+3)^2 + \frac{(x+5-15)^2}{25} = 65$

$25x^2+6\cdot 25x+9\cdot 25+(x-10)^2-65\cdot 25=0$

$26x^2+150x+225-20x+100-1625=0$

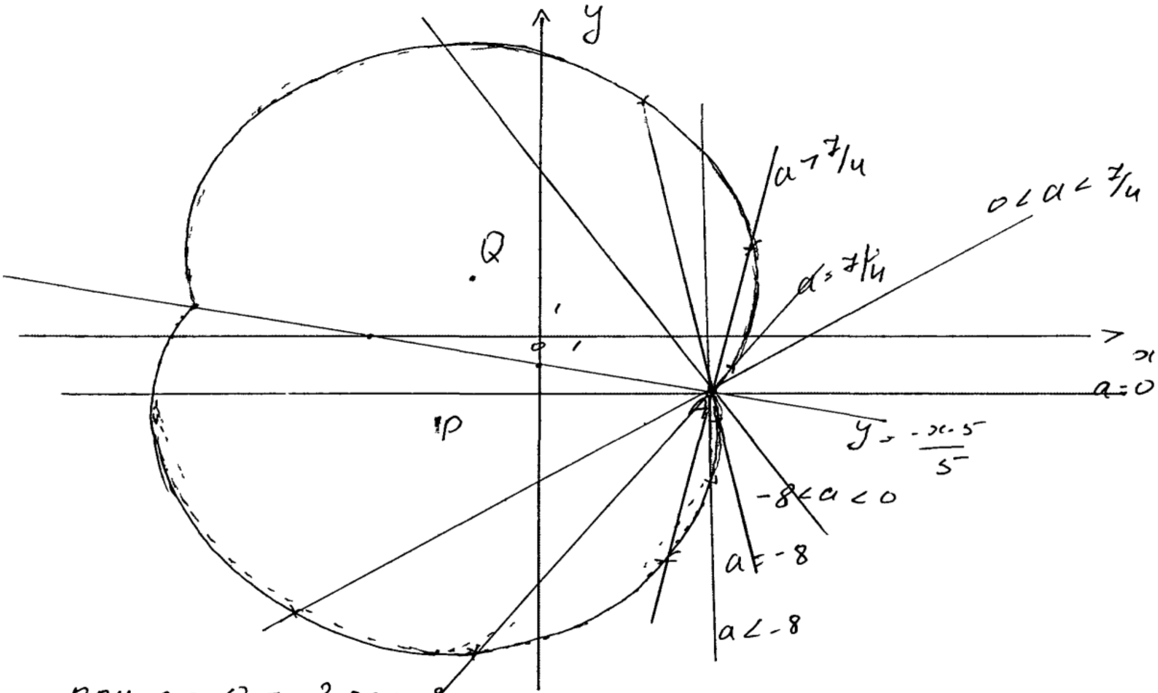
$26x^2+130x-1300=0$

$x^2+5x-50=0$

$x_3=x_1=5$, $y_3=y_1=-2$

$x_4=x_2=-10$, $y_4=y_2=1$

(2) $y=a(x-5)-2$ – ур-е пучка прямых, проход. через т $A(5;-2)$ см продолжение на доп бланке



при $a=0$ – 2 реш-я

найдём a, при к-м $y=a(x-5)-2$ касается окр-ти с ц. в т Q

$(x+2)^2+(a(x-5)-2-2)^2=65$

$x^2+4x+4+(a(x-5)-4)^2=65$

$x^2+4x+4+a^2(x-5)^2-8a(x-5)+16-65=0$

$x^2+4x+a^2(x^2-10x+25)-8ax+40a-45=0$

$\cancel{x^2+4}\ x^2(1+a^2)+x(4-10a^2-8a)+25a^2+40a-45=0$

$\frac{D}{4}=(2-5a^2-4a)^2-(a^2+1)(25a^2+40a-45)=$

$(5a^2+4a-2)^2-(a^2+1)(25a^2+40a-45)=$ см продолж на обороте

$25a^4 + 40a^3 + 16a^2 - \cancel{20a^2} - 16a + 4 - 25a^4 - 40a^3 + 45a^2 -$

$- 25a^2 - 40a + 45 = 16a^2 - 40a + 45 - 16a + 4 =$

$= 16a^2 - 56a + 49 = 0$ (т.к ур-е должно иметь ед-е реш-е)

$16a^2 - 56a + 49 = 0$

$\frac{D}{4} = 28^2 - 16 \cdot 49 = 0$

$(4a - 7)^2 = 0$

при $a = 7/4$ – 3 реш-я

при $a > 7/4$ – 3 реш-я, при $a \in (0; 7/4)$ – 2 р-я

найдём a, при к-х $y = a(x-5) - 2$ кас. окр-ти сц в т P

$x^2 + 6x + (a(x-5)-2)^2 + 6(a(x-5)-2) - 47 = 0$

$x^2 + 6x + a^2(x-5)^2 - 4a(x-5) + 4 + 6a(x-5) - 12 - 47 = 0$

$x^2 + 6x + a^2(x^2 - 10x + 25) - 4ax + 20a + 6ax - 30a - 55 = 0$

$x^2(1 + a^2) + 6x \cancel{+20} - 10a^2x + 25a^2 + 2ax - 10a - 55 = 0$

$x^2(a^2+1) + x(6 - 10a^2 + 2a) + 25a^2 - 10a - 55 = 0$

$\frac{D}{4} = (3 + a - 5a^2)^2 - (a^2+1)(25a^2 - 10a - 55) =$

$= 9 + 6(a - 5a^2) + (a - 5a^2)^2 - 25a^4 + 10a^3 + 55a^2 -$

$- 25a^2 + 10a + 55 = 25a^4 - 10a^3 + a^2 + 6a - 30a^2 +$

$+ 9 - \cancel{25a^4} + \cancel{10a^3} + \cancel{55a^2} - \cancel{25a^2} + 10a + 55 = a^2 + 16a + 64$

$a^2 + 16a + 64 = 0$ (т.к ур-е должно иметь ед-е реш-е)

$(a + 8)^2 = 0$

при $a = -8$ – 3 р-я

при $a < -8$ – 3 р-я, при $a \in (-8; 0)$ – 2 р-я

Ответ: 2 р-я при $a \in (-8; 0) \cup (0; 7/4) \cup \{0\}$, т.е при $a \in (-8; 7/4)$

***Комментарий*.**

Ход решения ясен, изложен более чем подробно. Ошибок нет, кроме недочета: концы промежутка не включены в ответ.

Оценка эксперта: 3 балла.

Пример 6.

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+5x+y^2-y-|x+5y+5|=52, \\ y-2=a(x-5) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Ответ: $-8 \le a \le \dfrac{7}{4}$.

Решение:

$$\begin{cases} x^2+5x+y^2+y-|x+5y+5|=52 \\ y+2=a(x-5) \end{cases}$$

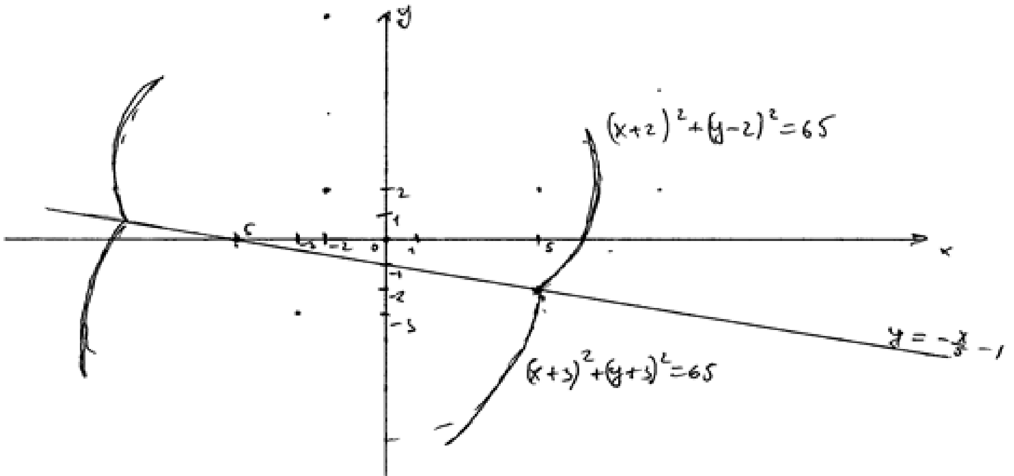
Рассмотрим 2 случае при $x+5y+5 \ge 0$ и при $x+5y+5<0$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+5x+y^2+y-x-5y-5=52 \\ x+5y+5 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+5x+y^2+y+x+5y+5=52 \\ x+5y+5<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x+2)^2+(y-2)^2=65 \\ y \ge -\frac{x}{5}-1 \end{cases} \\ \begin{cases} (x+3)^2+(y+3)^2=65 \\ y \le -\frac{x}{5}-1 \end{cases} \end{array}\right.$$

– графиком ф-ии явлеется окр. с центром $(-2;2)$ и $r=\sqrt{65}$

– графиком ф-ии явлеется окр. с центром $(-3;-3)$ и $r=\sqrt{65}$.

Построим эскизы графиков.



Рассмотрим $y+2=a(x-5)$.

$y=a(x-5)-2$. – графиком ф-ии явлеется множество прямых, проходящих через точку $(5;-2)$. Тогда, для касания окр. $(\{-3;-3\};\sqrt{65})$ „a" должно быть равно -8, а для касания окр$(\{-2;2\};\sqrt{65})$ „a" должно быть равно $\frac{7}{4}$.

при $a \in [-8;\frac{7}{4}]$ сис-ма имеет 2 корня.

при $a \in (-\infty;-8) \cup (\frac{7}{4};+\infty)$ сис-ма имеет 3 корня.

Ответ: $a \in [-8;\frac{7}{4}]$.

Комментарий.

Решение и ответ верные, хотя нет обоснования, почему для касания a «a должно быть равно –8» или «…7/4».

Оценка эксперта: 4 балла.

Пример 7.

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$\dfrac{|3x|-2x-2-a}{x^2-2x-a}=0$ имеет ровно два различных корня.

Ответ: $-2<a<-1$; $-1<a<0$; $0<a<3$; $3<a<8$; $a>8$.

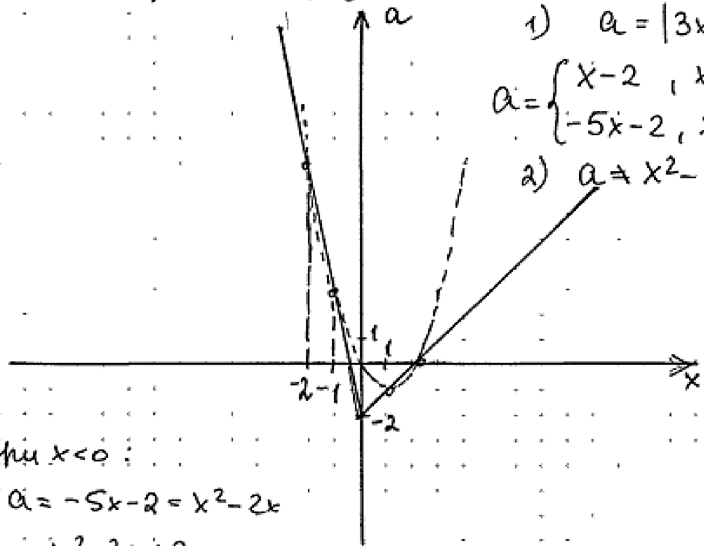
№18. $\dfrac{|3x|-2x-2-a}{x^2-2x-a}=0$

имеет ровно 2 различных корня $a=?$

1) $a=|3x|-2x-2 \Rightarrow$

$a=\begin{cases} x-2, & x\geq 0 \\ -5x-2, & x<0 \end{cases}$

2) $a = x^2-2x$



при $x<0$:

$a=-5x-2=x^2-2x$

$x^2+3x+2=0$

$x_1=-1$

$x_2=-2$, x_1 и x_2 точки пересечения двух графиков при $a(x_1)$ и $a(x_2)$ уравнение будет иметь только одно решение.

при $x\geq 0$

$x-2=x^2-2x \Rightarrow x^2-3x+2=0 \Rightarrow x_3=1$, $x_4=2$; При $a(x_3)$ и $a(x_4)$ будет только одно решение $\Leftrightarrow$;

$\Leftrightarrow a(x_1)=3$, $a(x_2)=8$, $a(x_3)=-1$, $a(x_4)=0$, в точке $a=-2$ уравнение также будет иметь только одно решение, при $a<-2$ решений не будет $\Rightarrow a>-2$, $a\neq-1$, $a\neq 0$, $a\neq 3$, $a\neq 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow a\in(-2;-1)\cup(-1;0)\cup(0;3)\cup(3;8)\cup(8;+\infty)$.

Ответ: $a\in(-2;-1)\cup(-1;0)\cup(0;3)\cup(3;8)\cup$

$\cup(8;+\infty)$.

***Комментарий*.**

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 4 балла.

Пример 8.

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$\dfrac{|3x|-2x-2-a}{x^2-2x-a}=0$ имеет ровно два различных корня.

Ответ: $-2<a<-1$; $-1<a<0$; $0<a<3$; $3<a<8$; $a>8$.

№18.

$\dfrac{|3x|-2x-2-a}{x^2-2x-a}=0$. Если знаменатель не равен нулю, то на него можно сократить.

$|3x|-2x-2-a=0$

Возведём уравнение в квадрат.

$(|3x|)^2=(2x+2+a)^2$

$5x^2+x(-8-4a)-4a-a^2-4=0$

$D=(-8-4a)^2-4\cdot5(-(a^2+4a+4))=a^2+4a+4.$

Чтобы уравнение имело 2 решения D должен быть >0

$a^2+4a+4>0$

$(a-2)^2>0$

$-\infty$ $+$ -2 $-$ 2 $+$ a $+\infty$ $\Rightarrow a\in(-\infty;-2);(2;+\infty)$.

Теперь разберёмся с ОДЗ.

$x^2-2x-a\neq0$. $\Rightarrow$ Нам не подходят варианты, когда $x^2-2x-a=0$ (если $x^2-2x-a=0$ уравнение имеет менее одного корня)

$D=4+4a.$

$x_{1,2}=\dfrac{2\pm\sqrt{4+4a}}{2}=1\pm\sqrt{1+a}$

Если $a\in(-\infty;-2)$, то $x^2-2x-a\neq0$

Если $a\in(2;+\infty)$, то $x^2-2x-a=0\Rightarrow$

$a\in(2;+\infty)$ не подходит.

Ответ: $a\in(-\infty;-2)$.

***Комментарий*.**

Неверное решение уравнения, содержащего переменную под знаком модуля. Неверная логика исследования количества корней.

Оценка эксперта: 0 баллов.

7. Критерии проверки и оценка решений заданий 19

Задание 19 проверяет достижение следующих целей изучения математики на профильном уровне: "развитие логического мышления, алгоритмической культуры, пространственного воображения, математического мышления и интуиции, творческих способностей, необходимых для продолжения образования и для самостоятельной деятельности в области математики и ее приложений в будущей профессиональной деятельности".

При этом, для решения этой задачи не требуется никаких фактов, выходящих за рамки школьного курса.

Условие задания 19 разбито на пункты - ряд подзадач (частных случаев), последовательно решая которые можно в итоге полностью выполнить задание. Такое разбиение, в первую очередь, облегчает участнику экзамена планирование работы над данной задачей, а также позволяет более четко и прозрачно провести оценивание выполнения задания.

Задача 19 (демонстрационный вариант 2020 г.).

В школах № 1 и № 2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали, по крайней мере, 2 учащихся, а суммарно тест писали 9 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом. После этого один из учащихся, писавших тест, перешёл из школы № 1 в школу № 2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.

а) Мог ли средний балл в школе № 1 уменьшиться в 10 раз?

б) Средний балл в школе № 1 уменьшился на 10%, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 10%. Мог ли первоначальный средний балл в школе № 2 равняться 7?

в) Средний балл в школе № 1 уменьшился на 10%, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 10%. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе № 2.

Решение. а) Пусть в школе № 1 писали тест 2 учащихся, один из них набрал 1 балл, а второй набрал 19 баллов и перешёл в школу № 2. Тогда средний балл в школе № 1 уменьшился в 10 раз.

б) Пусть в школе № 2 писали тест m учащихся, средний балл равнялся B, а перешедший в неё учащийся набрал u баллов. Тогда получаем:

$$u = 0{,}9(m+1)B - mB;\ 10u = (9-m)B.$$

Если $B = 7$, то $(9-m)B$ не делится на 10, а $10u$ делится на 10. Но это невозможно, поскольку $10u = (9-m)B$.

в) Пусть в школе № 1 средний балл равнялся A. Тогда получаем:

$$u = (9-m)A - 0{,}9(8-m)A;\ 10u = (18-m)A = (9-m)B.$$

Заметим, что если $B=1$ или $B=3$, то $10u=(9-m)B$ не делится на 10. Если $B=2$ или $B=4$, то $m=4$. В первом случае $14A=10$, а во втором $14A=20$. Значит, ни один из этих случаев не возможен.
При $B=5$ и $m=3$ получаем $u=3$ и $A=2$. Этот случай реализуется, например, если в школе № 1 писали тест 6 учащихся, 3 из них набрали по 1 баллу, а 3 — по 3 балла, в школе № 2 писали тест 3 учащихся и каждый набрал по 5 баллов, а у перешедшего из одной школы в другую учащегося – 3 балла.

Ответ: а) да; б) нет; в) 5.

Содержание критерия	**Баллы**
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта *а*; – обоснованное решение пункта *б*; – искомая оценка в пункте *в*; – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

Задача 1.

В последовательности a_1, a_2, …, a_{n-1}, a_n, состоящей из целых чисел, $a_1 = 1$, $a_n = 235$. Сумма любых двух соседних членов последовательности равна 3, 5 или 25.

а) Приведите пример такой последовательности.

б) Может ли такая последовательность состоять из 1000 членов?

в) Из какого наименьшего числа членов может состоять такая последовательность?

Решение.

а) Например, последовательность 1, 2, 3, 0, 5, -2, 7, -4, …, 233, -230, 235 удовлетворяет условию задачи (чередуются суммы чисел 3 и 5).

б) Поскольку 3, 5 и 25 — нечётные числа, любые два соседних члена последовательности имеют разную чётность. На нечётных местах должны стоять нечётные числа, а на чётных — чётные. Число 235 нечётное, поэтому оно не может стоять на чётном месте. Значит, последовательность не может состоять из 1000 членов.

в) Рассмотрим три члена последовательности: a_k, a_{k+1}, a_{k+2} $(1 \le k \le n-2)$.

Поскольку $a_k + a_{k+1} \ge 3$, $a_{k+1} + a_{k+2} \le 25$, получаем: $a_{k+2} \le a_k + 22$.

В предыдущем пункте было показано, что последовательность должна состоять из нечётного числа членов. Пусть $n = 2m+1$, тогда

$$a_n = a_{2m+1} \le a_{2m-1} + 22 \le a_{2m-3} + 22 \cdot 2 \le \ldots \le a_1 + 22 \cdot m; \; 235 \le 1 + 22m,$$

откуда $m \ge 11$. Значит, последовательность состоит не менее чем из 23 чисел.

Приведём пример последовательности, удовлетворяющей условию задачи, состоящей из 23 членов: 1, 2, 23, -20, 45, -42, 67, -64, 89, -86, 111, -108, 133, -130, 155, -150, 175, -170, 195, -190, 215, -210, 235.

Ответ: а) например, 1, 2, 3, 0, 5, -2, 7, -4, …, 233, -230, 235; б) нет; в) 23.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — пример в п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — искомая оценка в п. *в*; — пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Задача 2.

На доске написано 30 натуральных чисел (числа могут повторяться), каждое из которых либо зелёного, либо красного цвета. Каждое зелёное число кратно 3, а каждое красное число кратно 7. При этом все зелёные числа различны и все красные различны (какое-то зелёное число может равняться какому-то красному числу).

а) Может ли сумма написанных чисел быть меньше $1395 = 3 + 6 + \ldots + 90$, если все числа на доске кратны 3?

б) Может ли ровно одно число на доске быть красным, если сумма написанных чисел равна 1067?

в) Какое наименьшее количество красных чисел может быть на доске, если сумма написанных чисел равна 1067?

Решение.

а) Если на доске записано 29 зелёных чисел: 3, 6, …, 87 — и одно красное число 21, то их сумма меньше 1395.

б) Пусть на доске ровно одно красное число. Тогда зелёных чисел 29, а их сумма не меньше, чем сумма 29 наименьших чисел, делящихся на 3:

$$3 + 6 + \ldots + 87 = \frac{90 \cdot 29}{2} = 1305.$$

Это противоречит тому, что сумма написанных чисел равна 1067.

в) Пусть на доске написано n красных чисел и $30 - n$ зелёных чисел. Тогда сумма красных чисел не меньше $7 + 14 + \ldots + 7n = \dfrac{7n^2 + 7n}{2}$,

а сумма зелёных чисел не меньше

$$3 + 6 + \ldots + 3(30 - n) = \frac{3(31 - n)(30 - n)}{2} = \frac{3n^2 - 183n + 2790}{2}.$$

Таким образом, $1067 \geq 5n^2 - 88n + 1395$; $5n^2 - 88n + 328 \leq 0$, откуда, учитывая, что n — целое, получаем $n \geq 6$.

Приведём пример 6 красных чисел и 24 зелёных чисел, сумма которых равна 1067: 7, 14, 21, 28, 35, 56, 3, 6, …, 66, 69, 78.

Ответ: а) да; б) нет; в) 6.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта *а*; — обоснованное решение пункта *б*; — искомая оценка в пункте *в*; — пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Задача 3.

На столе лежит 40 карточек, часть из которых красного цвета, а остальные синего (есть хотя бы по одной карточке каждого цвета). На каждой карточке написано натуральное число. Все числа, написанные на синих карточках, различны. Любое число на красной карточке меньше любого числа на синей карточке. Среднее арифметическое всех чисел на карточках равно 14. Если утроить числа на синих карточках, то среднее арифметическое всех чисел станет равно 39.

а) Может ли на столе быть ровно 10 синих карточек?

б) Может ли на столе быть ровно 10 красных карточек?

в) Какое наибольшее количество синих карточек может быть на столе?

Решение.

а) Если на тридцати красных карточках написано число 2, а на синих карточках написаны числа 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 437, то условия задачи выполнены.

б) Пусть сумма чисел, написанных на красных карточках, равна k, а сумма чисел, написанных на синих карточках, равна s. Тогда

$$k+s=560;\ k+3s=1560,$$

откуда $k=60$, $s=500$.

Предположим, что красных карточек 10 штук. Если все числа на красных карточках не превосходят 5, то их сумма k не превосходит $5\cdot10=50$. Но $k=60$, значит, есть хотя бы одна карточка, на которой написано число, не меньшее 6. Так как любое число на синей карточке больше любого числа на красной карточке, все числа на синих карточках не меньше 7, а их сумма не меньше $7+8+...+36=645$. Но $s=500$, значит, не может быть ровно 10 красных карточек.

в) Предположим, что синих карточек n штук, а наибольшее число, написанное на красной карточке, равно u. Тогда $(40-n)u\ge60$. С другой стороны, так как любое число на синей карточке больше любого числа на красной карточке, все числа на синих карточках не меньше $u+1$, а их сумма не меньше

$$(u+1)+(u+2)+\ldots+(u+n)=nu+\frac{n(n+1)}{2}.$$

Но $s=500$, значит,

$$nu+\frac{n(n+1)}{2}\le500;\ u\le\frac{500}{n}-\frac{n+1}{2}.$$

Таким образом, получаем

$$\frac{60}{40-n}\le u\le\frac{500}{n}-\frac{n+1}{2}.$$

Заметим, что это неравенство не выполняется при $n \geq 27$, поскольку при $n \geq 27$

$$\frac{60}{40-n} \geq \frac{60}{13} > 4 \text{ и } \frac{500}{n} - \frac{n+1}{2} \leq \frac{122}{27} < 5.$$

Но неравенство $4 < u < 5$ не имеет целых решений, значит, синих карточек не может быть больше 26.

Покажем, что может быть 26 синих карточек. Если на десяти красных карточках написано число 4, на четырёх красных карточках написано число 5, а на синих карточках написаны числа 6, 7, …, 29, 30, 50, то условия задачи выполнены.

Ответ: а) да; б) нет; в) 26.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пунктах *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пунктах *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Примеры оценивания решений задания 19

Пример 1.

В последовательности a_1, a_2, …, a_{n-1}, a_n, состоящей из целых чисел, $a_1 = 1$, $a_n = 235$. Сумма любых двух соседних членов последовательности равна 3, 5 или 25.

а) Приведите пример такой последовательности.

б) Может ли такая последовательность состоять из 1000 членов?

в) Из какого наименьшего числа членов может состоять такая последовательность?

Ответ: а) например, 1, 2, 3, 0, 5, -2, 7, -4, …, 233, -230, 235; б) нет; в) 23.

б) Нет. т.к. в этой посл. $a_i + a_{i+1} = \left[\begin{array}{l}5\\3\\25\end{array}\right.$ =>
=> т.к. a_1 - неч., то все четные члены - чет,
а нечетные - неч => a_n=235 - неч член т.е.
n не. 1000 => ~~невозможно~~ не может.

~~в) (1; 2; -1; 6; ...)~~

а) 1; -26; 51; -46; 71; -66; 91; -86; 111; -106; 131;
-126; 151; -146; 171; -166; 191; -188; 213; -210; 235

***Комментарий*.**

В пункте *а* допущена ошибка – сумма первых двух чисел равна –25. При ответе на вопрос пункта *б* участник экзамена верно показал, что случай $n = 1000$ невозможен.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 2.

В последовательности a_1, a_2, …, a_{n-1}, a_n, состоящей из целых чисел, $a_1 = 1$, $a_n = 235$. Сумма любых двух соседних членов последовательности равна 3, 5 или 25.

а) Приведите пример такой последовательности.

б) Может ли такая последовательность состоять из 1000 членов?

в) Из какого наименьшего числа членов может состоять такая последовательность?

Ответ: а) например, 1, 2, 3, 0, 5, -2, 7, -4, …, 233, -230, 235; б) нет; в) 23.

19 А) Пример такой последовательности:

1, 2, 3, 0, 5, −2, 7, −4, 9, −6, 11, −8, 13, −10, 15, −12, 17, −14, 19, −16, 21, −18, 23, −20, 25, −22, 27, −24, 29, −26, 31, −28, 33, −30, 35, −32, 37, −34, 59, −56, 81, −78, 103, −100, 125, −122, 147, −144, 169, −166, 191, −188, 213, −210, 235.

Б) Да, например, последовательность, членами которой являются чередующиеся числа 0 и 3.

0, 3, 0, 3, 0, 3…

Сумма любых двух соседних членов в последовательности равна 3, что соответствует условию.

В последовательности, состоящей из 1000 членов, будет пятьсот 0 и пятьсот 3. Все нечётные члены последовательности будут нулями, все чётные – тройками.

Комментарий.

В пункте *а* верно приведен пример. Решение пункта *б* неверно.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 3.

На доске написано 30 натуральных чисел (числа могут повторяться), каждое из которых либо зелёного, либо красного цвета. Каждое зелёное число кратно 3, а каждое красное число кратно 7. При этом все зелёные числа различны и все красные различны (какое-то зелёное число может равняться какому-то красному числу).

а) Может ли сумма написанных чисел быть меньше $1395 = 3 + 6 + \ldots + 90$, если все числа на доске кратны 3?

б) Может ли ровно одно число на доске быть красным, если сумма написанных чисел равна 1067?

в) Какое наименьшее количество красных чисел может быть на доске, если сумма написанных чисел равна 1067?

Ответ: а) да; б) нет; в) 6.

а) 1395 = 3+6+...+90 – 30 чисел. Предположим изначально все они зелёные.
Да, может, т.к. мы можем заменить число 90 на число 21, написанное другим цветом (красным), а все тогда общая сумма уменьшится на 69 – ч.т.д.
б) Возьмём наименьшую сумму чисел написанных только зелёным. Это 1395 = 3+6...+90. Нам разрешено добавить одно красное число. Для того, чтобы минимизировать сумму мы уберём самое большое зелёное – 90 и добавим минимально возможное красное – 7. Итоговая сумма 1395 – 90 + 7 = 1312 > 1067 => не невозможно.
в) Числа кратные 3 дают остатки при делении на 7 в таком порядке: 3 6 2 5 1 4 0
Число 1067 даёт остаток 3 при делении на 7 =>
Все зелёные числа должны наименьшими быть ...
Они не могут попасть и на 87 т.к. 3...+87 = ~~1312~~ 1312 > ~~1067~~ =>
=> они должны попасть на 63.
3+...+63 = 63·11 = ~~759~~ 726, ~~1067 – 726~~ 1067 – 759 = 308 ~~80~~ 308 | 7 ... 44

Комментарий.

Приведено верное решение пункта *а*. Приведено верное решение пункта *б*. Решение в пункте *в* не завершено.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 4.

На доске написано 30 натуральных чисел (числа могут повторяться), каждое из которых либо зелёного, либо красного цвета. Каждое зелёное число кратно 3, а каждое красное число кратно 7. При этом все зелёные числа различны и все красные различны (какое-то зелёное число может равняться какому-то красному числу).

а) Может ли сумма написанных чисел быть меньше $1395 = 3 + 6 + \ldots + 90$, если все числа на доске кратны 3?

б) Может ли ровно одно число на доске быть красным, если сумма написанных чисел равна 1067?

в) Какое наименьшее количество красных чисел может быть на доске, если сумма написанных чисел равна 1067?

Ответ: а) да; б) нет; в) 6.

а) Да, пример:

$\underbrace{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \ldots 87}_{\text{зеленые}}$; $\underset{\text{красное}}{21}$

Сумма чисел $\overset{1326}{=} < 1395$, ~~т.к. 90 заменили на 21.~~

б) Найдем минимально возможную сумму с одним красным числом.

Т.к. сумма $\to \min \Rightarrow$ красное число $= 7$,

зеленые $-$ $3, 6, 9, 12, 15, 18, \ldots, 87$.

Σ чисел $= 1305 + 7 = 1312 > 1067 \Rightarrow$ не может

Ответ: нет.

в) Пусть $f(n)$ - функция, значение которой равно минимально возможной сумме при данном n, где n - кол-во красных чисел.

$$f(n) = 7 \cdot \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right) + 3 \cdot \left(\frac{(30-n)(31-n)}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(7n^2 + 7n + 3n^2 - \overset{183n}{3 \cdot 61n} + \overset{2790}{3 \cdot 30 \cdot 31}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(10n^2 - 176n + 2790\right) = 5n^2 - 88n + 1395.$$

найдем минимальное n ($n \in \mathbb{Z}^+$), такое что $f(n) \le 1067$.

$5n^2 - 88n + 1395 \le 1067$

$5n^2 - 88n + 328 \le 0$

$\frac{D}{4} = 44^2 - 328 \cdot 5 = 1936 - 1640 = 296.$

$n \in \left[\frac{44 - \sqrt{296}}{5}; \frac{44 + \sqrt{296}}{5} \right] \Rightarrow n = 6.$

$f(6) = 7 \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} + 3 \cdot \frac{24 \cdot 25}{2} = 3(49 + 12 \cdot 25) = 3 \cdot 349 =$
$= 1047.$

$f(5) = 1380 > 1067. \Rightarrow$ для 5 - неверно.

Ответ: 6 - наименьшее кол-во красных.

пример:

7; 14; 21; 28; 35; 56.

3; 6; 9; 12; ..... 69; 78; ~~81~~

Комментарий.

Обоснованно получены верные ответы во всех пунктах.

Оценка эксперта: 4 балла.

Пример 5.

На доске написано 30 натуральных чисел (числа могут повторяться), каждое из которых либо зелёного, либо красного цвета. Каждое зелёное число кратно 3, а каждое красное число кратно 7. При этом все зелёные числа различны и все красные различны (какое-то зелёное число может равняться какому-то красному числу).

а) Может ли сумма написанных чисел быть меньше $1395 = 3 + 6 + \ldots + 90$, если все числа на доске кратны 3?

б) Может ли ровно одно число на доске быть красным, если сумма написанных чисел равна 1067?

в) Какое наименьшее количество красных чисел может быть на доске, если сумма написанных чисел равна 1067?

Ответ: а) да; б) нет; в) 6.

а) Индекс обозначает цвет, которым написано число

а) Может, так как одно и то же число может быть записано разными цветами.

пример: $3_з, 6_з, \ldots, 87_з, 21_к$

б) Нет.

Если только одно число красное, то в ~~последовательности~~ наборе с наименьшей суммой $(3_з, 6_з, \ldots, 87_з, 7_к)$ сумма равна 1312, что больше, чем 1067

в) 6.

В ~~последовательности~~ наборе с шестью красными числами и наименьшей суммой $(3_з, 6_з, \ldots, 78_з, 7_к, 14_к, \ldots, 35_к)$ сумма равна 1077, $1077 > 1067$

Однако сумма будет равна 1067, если в приведённом выше наборе заменить $66_з$ на $56_к$.

***Комментарий*.**

Обоснованно получен ответ в пунктах *а* и *б*. В решении пункта *в* есть логическая ошибка: не доказано, что красных чисел не может быть меньше 5. Взяв пять красных, нужно взять 25 зеленых чисел, а не 26. Кроме того, сумма чисел найдена неверно.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 6.

На доске написано 30 натуральных чисел (числа могут повторяться), каждое из которых либо зелёного, либо красного цвета. Каждое зелёное число кратно 3, а каждое красное число кратно 7. При этом все зелёные числа различны и все красные различны (какое-то зелёное число может равняться какому-то красному числу).

а) Может ли сумма написанных чисел быть меньше $1395 = 3 + 6 + \ldots + 90$, если все числа на доске кратны 3?

б) Может ли ровно одно число на доске быть красным, если сумма написанных чисел равна 1067?

в) Какое наименьшее количество красных чисел может быть на доске, если сумма написанных чисел равна 1067?

Ответ: а) да; б) нет; в) 6.

19 а) Да, может. Например, вместо зеленого числа 24 можно написать красное число 21 (сказано, что красное число может равняться зеленому). Тогда сумма примет вид $3+6+\ldots+21+21+27+\ldots+90 = 1392 < 1395$.

Ответ: да, может.

б) Число 1067 имеет остаток 2 при делении на 3. Следовательно, красное число тоже должно иметь остаток 2 при делении на 3 (т.к. все зеленые числа имеют остаток 0). Наименьшее такое число — 14. Как известно из пункта а), сумма 30 наименьших зеленых чисел равна 1395. Даже если заменить наибольшее из них (90) на 14, то сумма будет равна $1395-90+14 = 1319 > 1067$. Следовательно, такого быть не может.

Ответ: нет, не может.

в) $1395-1067 = 328 \Rightarrow$ в сумме $3+6+\ldots+90$ необходимо так заменить несколько зеленых чисел на красные, чтобы суммарная разница между ними составила 328.

Во-первых, заметим, что за 5 замен это сделать невозможно, поскольку даже если заменить самые большие зеленые числа (90, 87, 84, 81, 78) на самые маленькие красные (7, 14, 21, 28, 35), то суммарная разница составит $305 < 328$.

Во-вторых, заметим, что если вдобавок заменить 72 на 49 ($72-49=23$), то суммарная разница составит как раз 328 ($305+23=328$) $\Rightarrow$ искомое наименьшее количество красных чисел — 6.

Ответ: 6.

***Комментарий*.**

Обоснованно получен ответ в пунктах *а* и *б*. В пункте *в* неверное обоснование, поскольку не доказано, что набор с минимальным количеством красных чисел получается заменой максимальных чисел из набора 3, 6, ..., 90 на минимально возможные различные красные числа. Кроме того, разница между пятью самыми большими зелеными числами и пятью самыми маленькими красными числами составляет 315.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 7.

На столе лежит 40 карточек, часть из которых красного цвета, а остальные синего (есть хотя бы по одной карточке каждого цвета). На каждой карточке написано натуральное число. Все числа, написанные на синих карточках, различны. Любое число на красной карточке меньше любого числа на синей карточке. Среднее арифметическое всех чисел на карточках равно 14. Если утроить числа на синих карточках, то среднее арифметическое всех чисел станет равно 39.

а) Может ли на столе быть ровно 10 синих карточек?

б) Может ли на столе быть ровно 10 красных карточек?

в) Какое наибольшее количество синих карточек может быть на столе?

Ответ: а) да; б) нет; в) 26.

№19. x – сумма чисел на красных карточках

y – сумма чисел на синих карточках

$$\begin{cases} x+y=14\cdot 40=560 \\ x+3y=39\cdot 40=1560 \end{cases} \Rightarrow 2y=1000 \Rightarrow y=500,$$

$x=60 \Rightarrow$ сумма ~~чисел~~ неповторяющихся синих чисел $=500$, а красных 60

а) Да, может. Пример: на 30 красных карточках написано число 2, а на 10 синих числа 100, 150, 3, 7, 5, 4, 9, 21, 175, 21. Каждое число на синей карточке больше любого на красной и неповторяется.

б) Нет. Если на столе ровно 10 красных карточек, то самое ~~во~~ маленькое из возможных максимальное число, написанное на карточке будет равно 6, тогда на синих карточках не должно быть числа меньше 7, синих карточек должно быть 30, а сумма на них равнять-

ся 500, самый меньший возможный шаг между числами $d=1$; тогда, если $a_1=7$, то сумма всех чисел $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$, где $n=30$, так как синих карточек всего 30, $a_n=29d+a_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow S_n=\frac{7+29\cdot1+7}{2}\cdot30=(14+29)\cdot15=43\cdot15=645$, что больше 500, S_n - минимальная сумма, которая может получиться; т.к. $S_n>500$ при данных условиях на столе не может быть ровно 10 красных карточек.
в). Ответ: 11, т.к. в других случаях общая сумма чисел на синих карточках превышает 500.

***Комментарий*.**
В решении пункта *а* приведен пример чисел на синих карточках, в котором есть повторяющееся число 21, да и сумма этих чисел равна 495, а не 500. Обоснованно получен ответ в пункте *б*. Решение пункта *в* фактически отсутствует, да и сам ответ неверный.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 8.

На столе лежит 40 карточек, часть из которых красного цвета, а остальные синего (есть хотя бы по одной карточке каждого цвета). На каждой карточке написано натуральное число. Все числа, написанные на синих карточках, различны. Любое число на красной карточке меньше любого числа на синей карточке. Среднее арифметическое всех чисел на карточках равно 14. Если утроить числа на синих карточках, то среднее арифметическое всех чисел станет равно 39.

а) Может ли на столе быть ровно 10 синих карточек?

б) Может ли на столе быть ровно 10 красных карточек?

в) Какое наибольшее количество синих карточек может быть на столе?

Ответ: а) да; б) нет; в) 26.

№ 19.

а) среднее арифм. $= \dfrac{\text{сумма}}{\text{кол-во}}$.

$\Rightarrow$ сумма $=$ с.А $*$ кол-во.

Пусть сума синих L, а красных M, тогда $L + M = 14 \cdot 40$ – это в 1м случае. Во втором $3L + M = 39 \cdot 40$

$$\begin{cases} L + M = 14 \cdot 40 \Rightarrow M = 14 \cdot 40 - L \quad (1) \\ 3L + M = 39 \cdot 40 \quad (2) \end{cases}$$

$1 \to 2 \qquad 3L + 14 \cdot 40 - L = 39 \cdot 40$

$2L = 40 \cdot 25$

$L = 20 \cdot 25 = 500$ – сумма всех синих $= 500 \Rightarrow 500$ надо получить 10 различными числами. Это можно сделать, например:

46; 54; 30; 70; 20; 80; 10; 90; 60; 40

б). $L = 500$; $M = 14 \cdot 40 - L \Rightarrow M = 520 - 500 = 20$.

Красных карточек 10. $\Rightarrow$ ~~числа~~ ~~с.А = 20~~. среднее арифметическое должно быть 2.

Такими числами могут быть.

2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2 $\Rightarrow$ Да.

Комментарий.

В решении пункта *а* есть только описание чисел, написанных на синих карточках. Указания чисел, написанных на красных карточках, отсутствует. В решении пункта *б* допущена вычислительная ошибка. Решение пункта *в* отсутствует.

Оценка эксперта: 2 балла.

Указания по оцениванию развернутых ответов участников ЕГЭ для эксперта, проверяющего развёрнутые ответы на задания 13–19 по МАТЕМАТИКЕ

(документ предоставляется эксперту при проведении оценивания экзаменационных работ вместе с критериями оценивания)

Эксперт, проверяющий задания с развернутым ответом, располагает следующими материалами:

1) тексты заданий;
2) возможный вариант решения каждой задачи 13–19;
3) критерии оценивания заданий 13–19.

При проверке выполнения заданий с развернутым ответом эксперт должен иметь возможность пользоваться ***непрограммируемым калькулятором.***

В критериях оценивания выполнения заданий с развернутым ответом КИМ ЕГЭ по математике для каждого задания приводится один возможный вариант решения. Однако предлагаемый разработчиками КИМ способ (метод) решения не является эталонным. Он лишь помогает эксперту в решении соответствующего задания.

Выполнение заданий оценивается в соответствии с критериями оценивания ответов на задания с развернутым ответом. Принципом построения системы оценивания является оценка продвижений участника экзамена в решении задачи в виде достижения формализованных в критериях промежуточных результатов. Максимальный балл выставляется только при наличии в тексте решения обоснованно полученного правильного ответа. Наличие в тексте решения недостатка в обосновании ответа или вычислительной ошибки не позволяет выставить за решение задания в соответствии с критериями максимальный балл. В случае, когда решение не подпадает ни под один из критериев положительных баллов (не достигнут ни один промежуточный математический результат), выполнение задания оценивается 0 баллов.

При использовании обобщенной схемы оценивания ответов на каждое из ***заданий 13-19 рекомендуется обращать внимание на следующие моменты:***

- ✓ Перед проведением проверки выполнения каждого из заданий необходимо изучить критерии его оценивания в материалах для эксперта, обратив внимание ***на детализацию и конкретизацию обобщенной схемы оценивания применительно к конкретному заданию***.

- ✓ Решение участника экзамена может иметь логику, отличную от логики решения, данного в критериях (альтернативное решение). В этом случае эксперт оценивает допустимость решения конкретной задачи тем способом, который выбрал участник экзамена. Если ход решения допустим, то ***эксперт оценивает обоснованность этого решения на основании той совокупности свойств (признаков), формул или утверждений, которые соответствуют выбранному способу решения.***

- ✓ Участник экзамена может использовать без доказательства математические факты и формулы, содержащиеся в учебниках, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования (далее – Федеральный перечень).

- ✓ Если экзаменуемый использует в решении без доказательства формулы и факты, которые не представлены в учебниках, входящих в Федеральный перечень, то такое решение классифицируется как недостаточно обоснованное.

- ✓ Если математические преобразования, представленные в решении, не отражают основных необходимых логических шагов, то решение не может оцениваться максимальным баллом.

- ✓ Если при решении геометрической задачи использует рисунок, то ошибки в соотношении длин отрезков на рисунке, не влекут за собой снижения баллов за решение геометрической задачи, если на рисунке верно отображена геометрическая конфигурация и верно обозначены точки, описанные в решении.

- ✓ При проверке правильности решения необходимо проверять корректность промежуточных шагов решения, в том числе числовых выкладок (при необходимости, с помощью калькулятора). Наличие ошибок в промежуточных выкладках, даже не повлиявших на итоговый ответ, означает наличие математически некорректного перехода в решении задачи, что не позволяет оценить решение задачи максимальным баллом.

- ✓ Если участник экзамена решает задачу с другими числовыми данными, то такое решение задачи оценивается в 0 баллов, даже если он решают содержательно более сложную задачу.

- ✓ При проверке решения каждого из ***заданий 13–19*** необходимо вычленить в решении ***три элемента:***
  - логика (последовательность и закономерность) решения,

– обоснованность решения,
– числовой ответ.

Количество логических шагов в решении и перечень условий и закономерностей зависит от выбранного способа решения. Это необходимо учитывать при применении критериев оценивания выполнения задания с развернутым ответом.

В процессе проверки необходимо придерживаться ***следующих общих правил:***

✓ При работе эксперт выставляет свои оценки в протокол проверки развернутых ответов.

✓ Выставление баллов в протокол проверки развернутых ответов рекомендуется проводить по работам: все задания первой проверяемой работы, все задания второй проверяемой работы и т.д. Это позволяет обнаружить ошибки, допущенные экзаменуемым в нумерации задач, а также обнаружить непронумерованную, или пронумерованную неверно, или случайно пропущенную экспертом задачу. Ошибочное указание участником экзамена номера задачи, которую он выполняет, не может служить основанием для снижения оценки за фактически выполненное задание.

✓ Результаты оценивания переносятся в протокол проверки развернутых ответов, при этом баллы по каждому заданию переносятся в колонку, название которой соответствует номеру задания (см. рисунок 1):
– баллы по заданию **13** переносятся в колонку **13** протокола;
– баллы по заданию **14** переносятся в колонку **14** протокола;
– баллы по заданию **15** переносятся в колонку **15** протокола;
– баллы по заданию **16** переносятся в колонку **16** протокола;
– баллы по заданию **17** переносятся в колонку **17** протокола;
– баллы по заданию **18** переносятся в колонку **18** протокола;
– баллы по заданию **19** переносятся в колонку **19** протокола.

✓ Баллы выставляются в протокол проверки *<u>гелевой черной ручкой</u>*.

✓ Внесение изменений в протокол проверки крайне нежелательно. Использование замазок и затирок с целью исправления записей категорически недопустимо!

Рисунок 1. Протокол проверки развернутых ответов 2020 года. Образец.

Протокол проверки развернутых ответов

Регион 99 Код предмета 2 Название предмета Математика профильная (дата экзамена) Номер протокола 1000001

ФИО эксперта Фамилия И.О. Код эксперта 000002

Примечание

Образец заполнения 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 X

№	Код бланка	Позиции оценивания																			
		13	14	15	16	17	18	19													
1	2820800339593																				
2																					
3																					
4																					
5																					
6																					
7																					
8																					
9																					
10																					

Дата проверки - -

Подпись эксперта

Внимание! При выставлении баллов за выполнение задания в Протокол проверки развернутых ответов следует иметь в виду, что **если ответ отсутствует** (нет никаких записей, свидетельствующих о том, что экзаменуемый приступал к выполнению задания), то в протокол проставляется «**X**», а не «0». Если в работе записан только номер задания без попыток ее решения, то в протокол выставляется «0».